

機関番号：24302

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2008～2010

課題番号：20740064

研究課題名（和文）可積分系アプローチによる新しいアルゴリズムの探求

研究課題名（英文）Research for new algorithms by integrable system approach

研究代表者

岩崎 雅史 (IWASAKI MASASHI)

京都府立大学・生命環境科学研究科・准教授

研究者番号：30397575

研究成果の概要（和文）：可積分系研究に基づき、3種類の新しいアルゴリズムを定式化した。具体的には、帯行列の固有値を求めるためのアルゴリズム、ニュートン法に基づく行列の対角化アルゴリズム、Max-Plus 代数における行列の固有値を求めるためのアルゴリズム、を定式化した。さらに、本研究で得られたアルゴリズムに加えて、既存のアルゴリズムに関しても、アルゴリズムがもつ数値特性のいくつかを明らかにした。

研究成果の概要（英文）：We design new three kinds of algorithms based on the studies of integrable systems. One of our proposal algorithms is matrix eigenvalues algorithm for band matrices. The second is matrix diagonalization algorithm for general matrices. The third is matrix eigenvalues algorithm in Max-Plus algebra. We also clarify some numerical properties of our proposal algorithms and existing algorithms.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2009年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：応用数学、可積分系、行列の対角化

1. 研究開始当初の背景

研究代表者らは、生物数理モデルとして知られたロトカ・ボルテラ系に対する可積分系アプローチから、行列の特異値分解を求める新しいアルゴリズム I-SVD の定式化に成功していた。I-SVD は、科学技術振興機構 PRESTO プロジェクト<研究代表者：中村佳正教授>、および、研究代表者の若手研究(B)（平成 19 年度終了分）によって、十分実用レベルまでに到達した。実際、I-SVD は、世界標準とさ

れる線形数値計算ライブラリ LAPACK の特異値分解アルゴリズムも凌ぐ優れた特性をもつことが数値的に確認された。また、ノースカロライナ大学の M. Chu 教授によって Acta Numerica 誌で I-SVD が紹介され、可積分系研究が起源の純国産アルゴリズムは広く認知されるようになった。

可積分系は、解析学、代数学、幾何学といった枠組みにとらわれず、美しい数理構造を発見できる柔軟な学問体系であるが、可積分

系研究の有意義な成果を起点とした I-SVD のような応用数学研究が試みられた例は少なかった。特に、離散ハングリー可積分系、超離散可積分系の応用研究は皆無であり、可積分系と相性のよい有名なニュートン法についても、意外にも行列の対角化アルゴリズムにうまく利用できたという研究報告はなかった。

2. 研究の目的

(1) 帯行列の固有値を求めるためのアルゴリズムの定式化

離散ハングリー可積分系に分類される離散ハングリーロトカ・ボルテラ系や離散ハングリー戸田方程式から、帯行列の固有値を求めるためのアルゴリズムを定式化する。

(2) ニュートン法に基づく対角化アルゴリズムの定式化

非線形方程式の解を求めるためのニュートン法概念を利用した、行列の特異値分解アルゴリズム、固有値分解アルゴリズムを定式化する。ここで、行列の特異値分解とは、行列の特異値と特異ベクトルの組をすべて求めることを、行列の固有値分解とは、行列の固有値と固有ベクトルの組をすべて求めることを指す。

(3) Max-Plus 代数における行列の固有値を求めるためのアルゴリズムの定式化

超離散方程式を利用した、Max-Plus 代数における行列の固有値を求めるためのアルゴリズムを定式化する。

(4) 行列の対角化アルゴリズムに関する数値特性の探求

(1), (2) で得られたアルゴリズム、既存の対角化アルゴリズムがもつ数値特性のいくつかを明らかにする。

3. 研究の方法

(1) 帯行列の固有値を求めるためのアルゴリズムの定式化

離散ハングリー可積分系によって与えられる行列の相似変形を明らかにし、解の漸近解析を通じて、帯行列の固有値を求めるためのアルゴリズムを定式化する。

(2) ニュートン法に基づく対角化アルゴリズムの定式化

ニュートン法が抱える初期値鋭敏性の問題を回避するための工夫を行い、ニュートン法のアイデアを活かした行列の対角化アルゴリズムを定式化する。

(3) Max-Plus 代数における行列の固有値を求めるためのアルゴリズムの定式化

Max-Plus 代数において、行列の相似変形を与える超離散方程式を導き、固有値を求めるためのアルゴリズムを定式化する。

(4) 行列の対角化アルゴリズムに関する数値特性の探求

可積分系に拘らず数値解析のアイデアと融合させて、行列の対角化アルゴリズムに関する数値特性を調べる。

4. 研究成果

(1) 帯行列の固有値を求めるためのアルゴリズムの定式化

離散ハングリー可積分系に基づき、帯行列の固有値を求めるためのアルゴリズムを定式化した。まず、離散ハングリー可積分系の 1 つである離散ハングリーロトカ・ボルテラ系を利用すると、あるクラスの帯行列の固有値が求められることを示した。一般的に複素固有値を精度よく求めるのは難しいとされているが、対象とするクラスの行列であれば、複素固有値でも高精度に求まることを数値的に確認した。続いて、離散ハングリーロトカ・ボルテラ系の qd 型を導き、この離散ハングリー可積分系でもあるクラスの帯行列の固有値が求まることを明らかにした。さらに、離散ハングリー戸田方程式も行列の相似変形に関連づけ、離散ハングリーロトカ・ボルテラ系との間に成り立つ Bäcklund 変換を導いた。以上の研究成果は、5 編の査読付き論文にまとめて発表した。

離散ハングリーロトカ・ボルテラ系、および、離散ハングリー戸田方程式を利用すれば、工学的にも研究対象とされる TN 行列の固有値が求まることも示した。TN 行列とは、どの部分の行列式の値も負にならない行列である。この研究成果をまとめた論文は、査読付き論文誌に投稿中である。

(2) ニュートン法に基づく対角化アルゴリズムの定式化

ニュートン法概念を利用して、行列の特異値分解、および、固有値分解を求めるアルゴリズムを定式化した。まず、一般的なニュートン法に工夫を施して、超平面制約法と名付けられた行列の特異値分解アルゴリズム、および、固有値分解アルゴリズムを新たに導いた。これらの多倍長演算版アルゴリズムも提案した。以上の研究成果は、5 編の査読付き論文にまとめて発表した。

(3) Max-Plus 代数における行列の固有値を求めるためのアルゴリズムの定式化

Max-Plus 代数において、行列の相似変形を

与える超離散方程式を明らかにし、行列の固有値を求めるためのアルゴリズムを定式化した。この研究成果は論文にまとめて近々発表予定である。

(4) 行列の対角化アルゴリズムに関する数値特性の探求

まず、中心多様体理論を使って、(1)で得られた離散ハングリーロトカ・ボルテラ系に基づく帯行列の固有値計算アルゴリズムが、収束の最終局面で一様に収束に向かうことを明らかにした。続いて、(2)で得られた行列の特異値分解のための超平面制約法が、有限桁演算においても高精度に特異値分解が求まることを理論的に明らかにした。実際、数値実験を通して、LAPACKの特異値分解アルゴリズムよりも精度面で優れていることも確認できた。また、特異値分解アルゴリズム I-SVD の起源となった離散ロトカ・ボルテラ系が、有名なフィボナッチ数や黄金比と関連付くことを示した。以上の研究成果は、3編の査読付き論文にまとめて発表した。

さらに、(1)で得られた帯行列の固有値計算アルゴリズム、および、特異値分解アルゴリズム I-SVD に含まれるダルブ変換の理論的な誤差解析については、学会において口頭発表した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 21 件)

- ① Akaiwa K and Iwasaki M, On m -step Fibonacci sequence in discrete Lotka-Volterra system, *J. Appl. Math. Comput.*, DOI: 10.1007/s12190-011-0488-x, 査読有
- ② Yadani K, Kondo K and Iwasaki M, Numerical performance of hyperplane constrained method and its hybrid method for singular value decomposition, *Computing*, 92, 265-283, 査読有
- ③ Fukuda A, Yamamoto Y, Iwasaki M, Ishiwata E and Nakamura Y, A Bäcklund transformation between two integrable discrete hungry systems, *Phys. Lett. A*, 375, 303-308, 2011, 査読有
- ④ Yamamoto Y, Fukuda A, Iwasaki M, Ishiwata E and Nakamura Y, On a variable transformation between two integrable systems: the discrete hungry Toda equation and the discrete hungry Lotka-Volterra system, *AIP Conf. Proc.*, 1281, 2045-2048, 2010, 査読有

- ⑤ Yadani K, Kondo K and Iwasaki M, Mixed double-multiple precision version of hyperplane constrained method for singular value decomposition, *JSIAM Letters*, 2, 25-28, 2010, 査読有
- ⑥ Yadani K, Kondo K and Iwasaki M, On the convergence of the V-type hyperplane constrained method for singular value decomposition, *JSIAM Letters*, 2, 21-24, 2010, 査読有
- ⑦ Yadani K, Kondo K and Iwasaki M, A singular value decomposition algorithm based on solving hyperplane constrained nonlinear systems, *Appl. Math. Comput.*, 216, 779-790, 2010, 査読有
- ⑧ Fukuda A, Ishiwata E, Iwasaki M and Nakamura Y, Discrete hungry integrable systems related to matrix eigenvalue and their local analysis by center manifold theory, *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, B13, 1-17, 2009, 査読有
- ⑨ Kondo K, Yasukouchi S and Masashi Iwasaki, Eigendecomposition algorithm solving sequentially quadratic systems by Newton method, *JSIAM Letters*, 1, 40-43, 2009, 査読有
- ⑩ Fukuda A, Ishiwata E, Iwasaki M and Nakamura Y, On the qd-type discrete hungry Lotka-Volterra system and its application to the matrix eigenvalue algorithm, *JSIAM Letters*, 1, 36-39, 2009, 査読有
- ⑪ Fukuda A, Ishiwata E, Iwasaki M and Nakamura Y, The discrete hungry Lotka-Volterra system and a new algorithm for computing matrix eigenvalues, *Inverse Problems*, 25, 015007(17pp), 2009, 査読有
- ⑫ 近藤弘一, 杉本昌平, 岩崎雅史, 非線形方程式の解法による行列の特異値分解アルゴリズム, *日本応用数学会論文誌*, 19, 81-103, 2009, 査読有
- ⑬ 福田亜希子, 石渡恵美子, 岩崎雅史, 中村佳正, 離散ハングリーロトカ・ボルテラ系による固有多項式の数値的因数分解, *日本応用数学会論文誌*, 18, 409-425, 2008, 査読有

[学会発表] (計 28 件)

- ① 永田宗寛, 岩崎雅史, dLV 変換の数値安定性について, 日本応用数学会研究部会連合発表会, 2011年3月7日, 電気通信大学
- ② 福田亜希子, 山本有作, 岩崎雅史, 石渡恵美子, 中村佳正, 行列の相似変形を与える離散ハングリー系の Bäcklund 変換について, 日本数学会秋季総合分科会, 2010年9月24日, 名古屋大学
- ③ 赤岩香苗, 岩崎雅史, 離散ロトカ・ボルテ

- ラ系に現れるマルチナッチ列について、日本応用数学会研究部会連合発表会、2010年3月9日、筑波大学
- ④ 矢谷健一, 近藤弘一, 岩崎雅史, 超平面制約付き非線形方程式に対するニュートン反復を利用した特異値分解法, 「行列・固有値の解法とその応用」第8回研究会, 2009年11月26日, 国立情報学研究所
 - ⑤ 矢谷健一, 近藤弘一, 岩崎雅史, 超平面制約付き非線形方程式に対するニュートン反復を利用した特異値分解法, 研究集会「非線形波動研究の現状と将来-次の10年への展望」, 2009年11月20日, 九州大学応用力学研究所
 - ⑥ 福田亜希子, 石渡恵美子, 山本有作, 岩崎雅史, 中村佳正, 離散ハングリー可積分系に基づく帯行列の固有値計算アルゴリズムとその誤差評価, 日本応用数学会年会, 2009年9月29日, 大阪大学
 - ⑦ 矢谷健一, 近藤弘一, 岩崎雅史, 超平面制約付き非線形方程式の解法による特異値分解アルゴリズムの収束性について, 日本応用数学会年会, 2009年9月29日, 大阪大学
 - ⑧ 福田亜希子, 石渡恵美子, 岩崎雅史, 中村佳正, 離散ハングリー可積分系に基づく帯行列の固有値計算アルゴリズム, 日本数学会秋季総合分科会, 2009年9月26日, 大阪大学
 - ⑨ 岩崎雅史, 中村佳正, 高速 SVD アルゴリズムとその応用[招待講演], OR学会シンポジウム, 2009年9月8日, 長崎大学
 - ⑩ 福田亜希子, 石渡恵美子, 岩崎雅史, 中村佳正, 離散ハングリー可積分系による固有値計算アルゴリズムとその漸近解析, 応用数学合同研究集会, 2008年12月15日, 龍谷大学
 - ⑪ 安河内進士, 近藤弘一, 岩崎雅史, 2次非線形方程式の求解によるニュートン法を用いた固有値問題の逐次解法, 研究集会「非線形波動の数理解と物理」, 2008年11月7日, 九州大学応用力学研究所
 - ⑫ 福田亜希子, 石渡恵美子, 岩崎雅史, 中村佳正, 帯行列の相似変形を与える離散可積分系について, 日本応用数学会年会, 2008年9月18日, 東京大学
 - ⑬ 安河内進士, 近藤弘一, 岩崎雅史, 非線形方程式の解法に基づくニュートン法を用いた固有値分解法, 日本応用数学会年会, 2008年9月17日, 東京大学
 - ⑭ 福田亜希子, 石渡恵美子, 岩崎雅史, 中村佳正, 可積分な生物数理モデルと固有値計算アルゴリズム, RIMS 研究集会「可積分数理の拡がり」, 2008年8月11日, 京都大学数理解析研究所

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岩崎 雅史 (IWASAKI MASASHI)
京都府立大学・生命環境科学研究科
・准教授
研究者番号：30397575

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

近藤 弘一 (KONDO KOICHI)
同志社大学・理工学部・准教授
研究者番号：30314397
石渡 恵美子 (EMIKO ISHIWATA)
東京理科大学・理学部・教授
研究者番号：30287958
山本 有作 (YUSAKU YAMAMOTO)
神戸大学・工学研究科・教授
研究者番号：20362288
中村 佳正 (YOSHIMASA NAKAMURA)
京都大学・情報学研究科・教授
研究者番号：50172458