様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　24 年 5 月 30 日現在

機関番号：１２６０８
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2008　～2011
課題番号：20740077
研究課題名（和文）　離散的視点に基づくネバリンナ理論の研究

研究課題名（英文）　Nevanlinna theory from view point of discreteness

研究代表者
山ノ井　克俊（YAMANOI KATSUTOSHI）
東京工業大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：40335295

研究成果の概要（和文）：
複素解析の理論であるネバリンナ理論と数論の理論であるディオファントス幾何学の間には強い類似性があることが Vojta らによって指摘されてきた。本研究では本来連続的な世界に立脚しているはずのネバリンナ理論の中には離散的な原理が存在しているはずである、という視点からネバリンナ理論の研究を行った。特にネバリンナ理論に現れる接近関数をこの視点から考察して、第二主要定理の等式評価を証明し、それを有理型関数に対する古典的な問題である Gol'dberg 予想と Mues 予想の解決に応用した。

研究成果の概要（英文）：
Between Nevanlinna theory on complex analysis and Diophantine geometry on Number theory, there are strong similarities, which are pointed out by several mathematician including Voijta. In this research, we studied Nevanlinna theory from the view point that there are discreteness principle in Nevanlinna theory, though the theory is based on the principle of continuous. In particular, I studied the proximity function in the theory from this view point, and proved the asymptotic equality in the second main theorem, then applied this to resolve Gol'dberg and Mues conjectures, which are classical conjectures in the theory of meromorphic functions.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	500,000	150,000	650,000
2009 年度	500,000	150,000	650,000
2010 年度	500,000	150,000	650,000
2011 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
総　計	2,000,000	600,000	2,600,000

研究分野：数学
科研費の分科・細目：基礎解析学
キーワード：ネバリンナ理論、値分布論、タイヒミュラー空間、正則運動、高階導関数、正則曲線

１．研究開始当初の背景

複素解析の理論であるネバリンナ理論と数論の理論であるディオファントス幾何学の間には強い類似性があることが Vojta らによって指摘されてきた。すなわち、Vojta はネ

バリンナ理論を記述するための基本的な不変量を、ディオファントス幾何学を記述するための不変量に翻訳するための辞書、いわゆるVojtaの辞書を作成した。さらにネバリンナ理論における基本的な結果である、第一主要定理と第二主要定理が、前述の不変量を用いて記述されることに着目し、第一主要定理をVojtaの辞書を用いてディオファントス幾何学の世界に翻訳すると高さの理論というディオファントス幾何学における基本的な関係になることを見出した。さらに驚くことには、ネバリンナ理論における最も重要な定理である第二主要定理をVojtaの辞書を用いてディオファントス幾何学の世界に翻訳すると、ディオファントス幾何学における極めて重要な成果である Roth の定理になることを見出した。Vojta はこのようなネバリンナ理論とディオファントス幾何学の類似関係が高次元の世界でも成立するのではないかという期待のもとで、高次元ネバリンナ理論における Griffiths-King らの微分非退化同次写像に対する第二主要定理をVojtaの辞書を用いてディオファントス幾何学の世界に翻訳したものが正しいのではないかと予想した。これは現在Vojta予想と呼ばれる。そしてこの予想が正しければ、Lang予想を始めとする未解決の大予想から、Mordell-Faltingsの定理、Schmidtの部分空間定理、Rothの定理を始めとする既知の大定理も包含してしまう巨大な予想であることを観察した。このような状況のもと、ネバリンナ理論とディオファントス幾何学の類似性を、単に結果の形式的な類似性にとどまらず、Vojta の辞書に基づいて証明における類似性にまで追求する、という研究が行われている。例えば、ネバリンナ理論におけるCartan予想のNochikaによる解決をVojtaの辞書に基づいて翻訳することで、Ru-Wong はディオファントス幾何学におけるSchmidtの部分空間を拡張する結果を導くなど、Vojtaの辞書を用いて両理論を自由に行き来する、という方面の研究は国際的に活発に研究されている。

２．研究の目的

ネバリンナ理論とディオファントス幾何学の間には、Vojta の辞書に基づく形式的な類似性はあるものの、本来ネバリンナ理論は連続的な世界に立脚し、ディオファントス幾何学は離散的な世界に立脚している、という根本的な相違がある。本研究の目的は、このようなネバリンナ理論とディオファントス幾何学の間の類似的でない側面にむしろ光をあてることで、ネバリンナ理論とディオファントス幾何学の間の関係をより深いレベルで考察することにあった。そのために、ネバリンナ理論における接近関数に着目した。これはVojtaの辞書ではディオファントス幾何学における無限素点に対応する。しかし、ディオファントス幾何学における無限素点は有限個の点であるが、ネバリンナ理論における「無限素点」は円周という広がりを持った連続的な対象になる。これはネバリンナ理論とディオファントス幾何学の類似性が成立しない部分である、と考えられてきた。本研究ではこの点に着目した。その際の作業仮説は、ネバリンナ理論とディオファントス幾何学の間には結果的に強い類似性がある以上、ネバリンナ理論には離散的な原理が含まれており、その離散性、もしくは有限性の帰結をネバリンナ理論における「無限素点」から取り出すことができるはずだ、というものであった。ネバリンナ理論の重要な結果である、対数微分の補題はそのような帰結の一つの例を与えている、という解釈を私は与えたが、これはこの作業仮説を支持する状況証拠といえるだろう。本研究ではネバリンナ理論における離散性の帰結として、第二主要定理の逆向きの不等式を目標とした。これは「無限素点」が有限個の点から構成されていれば当然成り立つはずの関係式であり、本研究の作業仮説を確かめるための重要な問題と思われた。第二主要定理の逆向きの不等式には歴史的な興味もある。この問題は少なくてもネバリンナ理論の草創期 1930 年代から、Nevanlinna,Teichmuller などによって話題とされてきた。たとえば Nevanlinna による古典的な名著である「解析関数論」という本には、この問題が話題とされ、「様々な理由から」第二主要定理が本来逆向きの評価を持つことが期待される一方で、安直な方法ではこの逆向き評価は成立しないことが例とともに述べられている。つまり、第二主要定理の逆向きの評価式を証明するには、そもそもその定式化から発見しなければならない、という状況にあった。本研究ではこの逆向きの評価式を、有理型関数の導関数の値分布に関する未解決予想である、Gol'dberg 予想とMues予想に応用することを目指した。

３．研究の方法

ネバリンナ理論における「無限素点」の離散性ないしは有限性の帰結を取り出す方法は、ディオファントス幾何学の場合とは根本的に異なっているはずであり、高度な複素解析的な手法が必要なはずである。実際、本研究ではポテンシャル論をその基本的な手法として活用した。また、第二主要定理の逆向きの評価式を証明するには、そもそもその定式化が問題になるが、そこはネバリンナ理論のパラメータである半径ｒごとに接近関数のターゲットである点をかえることで解決した。すなわち、ｒ ごとに、ターゲットである点のうち接近関数が最大になるものを取り出す

ことにした。しかし、その際に通常のネバリンナ理論におけるように各点からの寄与を足し合わせてしまうと、逆に大きくなりすぎて、元の第二主要定理が成り立たない、という事態がおこる。そこで、各点の寄与を足すのではなく最大関数を用いることにした。こうすることで、第二主要定理を成り立たせつつ、逆向きの評価式も達成することができる。さらに、第二主要定理の逆向きの評価式をGol'dberg予想やMues予想に応用するためには、従来の第二主要定理をターゲットが有理関数の場合に拡張した上で、さらにターゲットを動かしたときの一様な第二主要定理が必要になる。これは私が以前に証明した動標的に対する第二主要定理の一つの精密化に対応する。この動標的に対する第二主要定理の証明には、点付リーマン球のモジュライ空間のドリューニュ・マンフォードコンパクト化の理論が用いられ、その証明法を用いて、私は関数体上の曲線に対するVojta予想の証明にも成功している。本研究では、動標的として有理関数というより狭いクラスの関数に制限された状況で、一様な評価、というより強い結果を得ることが求められた。ドリューニュ・マンフォードコンパクト化を用いる前述の証明法では、一様な評価を得ることは出来たが、一様評価の係数が指数オーダーになってしまう、という技術的な問題が残ってしまった。Gol'dberg予想やMues予想に応用するためには、この係数を多項式オーダーにすることが必須であり、そのためにより精密な証明法が求められた。すなわち、タイヒミュラー空間や擬等角写像に対する複素解析的な評価、双曲幾何学の広狭分解、円環領域上の正則運動の拡張定理を用いて、すべての係数を具体的に評価していくことで、単にモジュライ空間のドリューニュ・マンフォードコンパクト化を用いるよりも精密な結果を得、結果的に必要な係数が多項式オーダーになることを示すことができた。

４．研究成果

第二主要定理の逆向きの評価式を証明し、さらにそれを用いてGol'dberg予想とMues予想を解決した。これらは、複素平面上の超越的な有理型関数すべてに対して成り立つ一般的、かつ非自明な評価式である。その内容をひとことで述べると、複素平面上の超越的な有理型関数に対しては、相異なる極の数よりも二階微分の零点の数のほうが漸近的には多い(Gol'dberg予想)、および複素平面上の超越的な有理型関数の欠如指数の和を有限複素数全体でとると常に1以下である(Mues予想)、というものである。これらは30年以上に渡って多くの専門家に話題にされてきた未解決問題であった。これは本研究の重要な成果である。さらに、Gol'dberg予想の解決は、実際には予想されていたものよりも強い形で証明することに成功した。すなわち、Gol'dberg予想自体は極を持たない整関数のときには自明になってしまうが、私が証明した評価式は整関数の場合にも極めて非自明な帰結を導く。すなわち、分岐値を固定したときの分岐点の個数は漸近的には２階微分の零点の数よりも少ない、ということが証明できた。これは本研究によって発見された全く新しい有理型関数の性質であるといってもよいであろう。この性質をさらに追求することは一つの興味深い問題である。例えば次のような予想をたてることができる：位数有限の整関数が重根を無限個もてば、その２階微分は無限個の零点をもつ。このように新しい現象と問題の発見も本研究の成果であるといえるだろう。以上の結果は現在論文を投稿して出版に向けて最終的な査読段階になっている。また高次元Nevanlinna理論の研究を私は継続的に行っている。これは第二主要定理を高次元射影多様体に対して確立することを目指すテーマである。この方面では野口潤次郎、J.Winkelmann両氏と共同で準アーベル多様体の第二主要定理を個数関数の打ち切りレベルを１で証明することに成功した論文を出版することが出来た。その結果、対数的不正則数が次元以上であって、小平次元が正の代数多様体への正則曲線の代数退化性を証明することが出来た。これはいくつかの先行する結果を含むより一般的な結果になっている。また、多様体の複素双曲性と基本群の非可換性に関するCampanaの予想を、基本群が線形群である場合に証明した論文を出版した。すなわち、複素射影多様体が代数的に非退化な整正則曲線を含むならば、その多様体の基本群の任意の線形表現の像はほとんど可換であることを証明した。証明には、私が以前に証明したアーベル多様体に対する第二主要定理が個数関数の打ち切りレベル１で成り立つという成果や、Simpsonによるケーラー群の研究、射影多様体の一意化理論であるシャファレビッチ写像の研究、Griffiths-Schmidtのホッジ構造の分類空間の理論、Gromov-Shoenによるｐ－進調和写像の理論、Katzarkov-Zuoによるスペクトラル多様体の理論など、国内外の多くの研究者による複素幾何学の様々な理論を有機的に活用することが必要であった。この研究は今後、有限円板からの正則写像の理論に拡張することで、小林擬距離の完全退化性から射影多様体の普遍被覆空間となり得るシュタイン多様体を特徴つける、という方向を目指して研究を継続していきたい。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）
① Katsutoshi Yamanoi, On fundamental groups of algebraic varieties and value distribution theory, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 60 no. 2 (2010) , 551-563.
② Junjiro Noguchi, Jorg Winkelmann, Katsutoshi Yamanoi, The second main theorem for holomorphic curves into semi-Abelian varieties II, Forum Math. 20 no. 3 (2008), 469-503

〔学会発表〕（計 8 件）
① Katsutoshi Yamanoi, On value distribution of derivatives of meromorphic functions, The 19th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, アステールプラザ広島, 2011 年 12 月 11 日
② 山ノ井克俊, 正則写像の値分布論とディオファントス問題, 10th Oka Symposium, 奈良女子大学, 2011 年 12 月 4 日
③ 山ノ井克俊, 有理型関数の第二主要定理について, 函数論分科会特別講演, 日本数学会秋期総合分科会,信州大学, 2011 年 10 月 1 日
④ 山ノ井克俊, 第二主要定理に関する一注意,「等角写像論・値分布論」合同研究集会, コラッセふくしま、2010 年 12 月 4 日.
⑤ Katsutoshi Yamanoi, On zeros of higher derivatives of meromorphic functions in the plane, Conference on Complex Analysis, University of Illinois at Urbana-Champaign, アメリカ, 2010 年 5 月 22 日.
⑥ 山ノ井克俊, 有理型関数の導関数の値分布, 函数論シンポジウム, 大阪府立大学, 2009 年 11 月 22 日.
⑦ Katsutoshi Yamanoi, Some topics in Nevanlinna theory concerning derivatives of meromorphic functions, The XX1st Rolf Nevanlinna Colloquium, 京都大学, 2009 年 9 月 7 日.
⑧ Katsutoshi Yamanoi, On fundamental groups of algebraic varieties and value distribution theory, 多変数関数論葉山シンポジウム, 湘南国際村センター, 2008 年 7 月 12 日

６．研究組織
(1)研究代表者
山ノ井 克俊（YAMANOI KATSUTOSHI）
東京工業大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：40335295