

平成22年4月10日現在

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2008～2009

課題番号：20740080

研究課題名（和文） 覆い被さる波の数学解析

研究課題名（英文） Mathematical analysis on overhanging waves

研究代表者

小川 聖雄 (OGAWA MASAO)

東京理科大学・理工学部・助教

研究者番号：50408704

研究成果の概要（和文）：水の波の運動は、流体力学における主要な研究対象である。この運動は、通常、渦がない非圧縮性理想流体に対する自由境界問題として定式化されるが、その場合、水面が覆い被さるような状況であっても時間局所解が存在することが知られていた。一方、現実の海には渦がある。そこで、渦なしの仮定をすることなく、同様の状況で自由境界問題を考察した。まず、線形化した問題の解析を行った。この線形問題は、水面が大きく波打たない場合に得られるものとは異なるものである。そして、得られた結果と方程式の対称性を利用して、水の波の問題に時間局所解が存在することを証明した。

研究成果の概要（英文）：The motion of water waves is a prime research subject in fluid dynamics. This motion is usually formulated as the free boundary problem for an irrotational, incompressible and ideal fluid. It is known that the temporally local solution for this problem exists, even if the waves overhang. On the other hand, the motion of the waves of the ocean is rotational. Therefore, we are interested in the water-wave problem without the assumption of the irrotational motion. First, the author has analyzed the linearized problem. This problem is different from the one in the case that the amplitude of the surface is not large. After that, by the result for the linearized problem and the symmetry of the equations, the existence of the temporally local solution for the water-wave problem has been shown.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	800000	240000	1040000
2009年度	500000	150000	650000
年度			
年度			
年度			
総計	1300000	390000	1690000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：基礎解析学

キーワード：非線形偏微分方程式

## 科学研究費補助金研究成果報告書

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 水の波の運動を調べることは、流体力学における主要な課題である。通常、この運動は、渦がない非圧縮性理想流体に対する自由境界問題として定式化される。即ち、時刻によって変化する表面（と固定された水底）によって囲まれた領域に流体が満たされており、流体領域内部で運動量保存則と質量保存則が成り立つ。そして、自由表面上で力学的境界条件と運動学的境界条件、領域に水底がある場合は slip 条件が課される。さらに、流体速度と水面の振幅に対する初期条件が課される。

ここで、流体が渦なし運動をすると仮定されるのは、

- ・流体が静止したときは渦なしであり、
- ・水の波は、静止状態から重力によって引き起こされたと考えることができ、
- ・一定重力の下では渦度が保存されるからである。

この自由境界問題を近似して得られる方程式（浅水波方程式、KdV 方程式 Boussinesq 方程式など）については、物理学的・数学的に多くの研究結果がある。しかし、完全非線形である元の問題は解析が非常に困難なため、ごく僅かな結果しか得られていなかった。

非定常問題の研究は、小さな初期値に対する時間局所解の存在の証明から始まった。近年は、

- ・大きな初期値に対する時間局所解の存在
  - ・近似方程式を満たすような初期値に対する解の存在時間の延長
- という形に改良がなされている。

(2) 現実の海の波には渦がある。そこで研究代表者は、渦なしの仮定をせずに自由境界問題を研究してきた。これまで、水面がグラフであるような 2 次元領域の問題に対し、

- ・小さな初期値に対する時間局所解の存在
- ・大きな初期値に対する時間局所解の存在
- ・大きな初期値に対する時間局所解の延長（任意の有限時間）可能性

を証明した。最後の論文では、渦なしの先行研究よりも多くの情報を得ている。

(3) 自由境界問題そのものを考察するからには、近似理論から離れた場合を追究せねばならない。そのため、研究代表者はデータの大きい流れを研究してきた。

本研究では、これまでの研究をさらに発展させて、波が覆い被さっているような状況で問題を考察する。

## 2. 研究の目的

水面がグラフで記述できない場合、水の波の問題に対して、時間局所解がただ 1 つ存在することをソボレフ空間で示す。

これを以下の条件の下で行う。

- ・表面張力の影響がある。
- ・初期値（流速、渦度、水面の振幅）のうち、流速と渦度が小さい。

この問題は、渦なしの仮定の下では、既に考察されていた。しかし、現実の流れでは、波が覆い被さっている部分に渦が集中している。従って、渦ありの場合に修正することは、現象の観点から非常に重要である。また、その問題を解析するには、今までと異なる線形方程式を解く必要があるため、数学上も研究する価値がある。

よって、特に、渦なしの仮定をせずに、水の波の問題を考察することを研究目的とする。

## 3. 研究の方法

本研究を以下の手順で進めた。

(1) 自由境界問題を、水面上の初期値問題と、領域内部の境界値問題に分解する。

(2) 水面上の初期値問題を準線形化し、得られる線形方程式をエネルギー法により解く。このとき直交座標を用いると、水面が多価の部分の解析が困難なため、水面に沿った座標を導入しておく。

(3) 研究 (2) の結果と反復法により、水面上の非線形問題が時間局所解をもつことを示す。

(4) 領域内部の問題を解く。

(5) 研究 (3)、(4) の結果と反復法により、自由境界問題の解を構成する。

表面張力の影響がないと仮定して問題を考察すると、(2) では渦なしの先行研究のような弱双曲型方程式が得られる。この初期値問題の適切性のためには、テイラー不安定性に関する符号条件が満たされないとはいけない。ところが、渦あり流れの場合には、波が覆い被さる部分で符号条件が満たされないため、今までの線形理論が適用できない。

そこで、表面張力の影響があり、さらに、領域に水底がない（水深が無大）と仮定した。すると、水面上の方程式は対称性をもつ。対称性を利用すると、今までに研究代表者が扱った方程式に似た形が得られた。但し、直交座標でないため、方程式の主要部の擬微分

作用素が歪む。

先行研究では、この主要部を  $-i \operatorname{sgn} D$  と表示し、基本解を求めていた。本研究では、基本解の表示をすることなく、作用素の性質を用いて、直接、エネルギー不等式を導いた。そして、反復法により線形問題を解決した。

研究(4)では、従来のおおりの、楕円型境界値問題に帰着させた。よって、水面がグラフでないことは、新たな障害にはならなかった。

(5) は、以前と同様、初期速度と渦度が小さいことを利用して解決した。

その後、流体領域に水底がある場合の問題を考察した。手順は、水底がない場合と同様であるが、水面上に制限した方程式が異なるものになる。

水底があると、水面上の方程式が非対称になる。そして、形式的に準線形化すれば、デリバティブ・ロスが起きてしまう。このことは、非線形問題を解くのに不都合である。

そこで、水底がない場合に得た対称的な線形方程式を主要部とみなした。つまり、(2) はそのまま、(3) では非対称の部分が低階項であることを示した。

表面張力は水底の効果より高階の微分で表される、ということと、初期速度と渦度が小さいという仮定をうまく活用し、解決をした。(4)、(5) は同様の手法によった。

#### 4. 研究成果

本研究では、水底がない場合とある場合のそれぞれについて、時間局所解が一意に存在することを示した。

(1) 関連研究の中での当該研究の位置づけについて

大きな初期値に対する渦あり問題の研究は、他に2つ発表されていた。しかし、その1つでは、

・物理的な付加条件の下で考察がなされている。

また、もう1つでは、

・人工的な条件が加えられている。

従って、本来の問題の解析をしていない。

それに比べて、研究代表者のこれまでの解析および本研究成果では、付加条件なしで一貫している。その意味では、渦ありで、初期値が大きいときの解析は、応募者の研究だけである。

(2) 当該分野における学術的な意義

①水面がグラフで記述できない場合の研究であること。

本研究で扱った問題は、波が砕ける直前を想定している。よって、構成した局所解は、時間を延長すれば爆発すると予想できる。

一方、水の波に対しては、解の爆発に関する研究が皆無である。将来は、本研究を出発点として、解の爆発の研究に発展させることを予定している。

初期値が大きい場合の先行研究では、自明な解を基準にして解析しているため、解の存在時間に関する情報が詳しく得られていない。本研究では、水面の振幅は大きいものの、初期速度と渦度の小ささが必要となる。このことは、先行研究よりも良くない結果のように見える。しかし、本研究結果と以前の論文の(自明な解でないものを基準とするという)手法を融合すれば、初期時刻における流速と渦度の小ささの制限は、取り除くことができる。

自明でないものを基準とすることによって、解の存在時間の情報を先行研究より詳しく求められる。この存在時間の情報は、爆発の研究をする際の良い手がかりとなるはずである。以上の理由から、本研究では、敢えて、初期速度と渦度が小さいという条件を課している。

②渦がある場合の研究であること。

実際の現象では、流れが渦なしとは限らない。渦なし流れとして考察することが多いのは、解析を容易にできるという、数学上の理由がある。代表者の一連の研究は、先行研究における渦なし条件が、問題の適切性のために本質的ではないことを明らかにしている。

また、砕ける波や風が吹くと起きる波は、科学的・工学的問題で重要となる。これには渦が関係しており、かつ、解析的な研究が殆どなされていない。本研究は、このような複雑な現象を解明するための基礎をなすものであり、将来、数学のみならず、理工学の広い分野に役立つはずである。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計1件)

Masao Ogawa, Well-posedness for water wave problem with vorticity, Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods and Applications, 査読有、71 巻、2009、pp. e2969—e2975

[学会発表] (計3件)

①小川聖雄、水の波の問題に対する数学解析、

京都産業大学理学部公開セミナー、2009年12月5日、京都

② Masao Ogawa、Rotational motion of an inviscid incompressible fluid with free boundary、Navier-Stokes equations: Classical and generalized models、2008年9月26日、イタリア

③ Masao Ogawa、Rotational motion of an inviscid incompressible fluid with free boundary、The Fifth World Congress of Nonlinear Analysts、2008年7月2日、アメリカ

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

小川 聖雄 (OGAWA MASAO)

**東京理科大学・理工学部・助教**

研究者番号：50408704

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：