

機関番号：35302

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008～2010

課題番号：20740082

研究課題名（和文） 2点境界値問題の符号変化する解の個数に関する研究とその応用

研究課題名（英文） A study on the number of sign-changing solutions of two-point boundary value problems and its application

研究代表者

田中 敏 (TANAKA SATOSHI)

岡山理科大学・理学部・准教授

研究者番号：90331959

研究成果の概要（和文）：

本研究では非線形常微分方程式の2点境界値問題を考えた。その問題の符号変化する解の一意性について新たな結果を得た。また、その応用として球状領域における楕円型偏微分方程式の境界値問題の符号変化する球対称解が一意であるための十分条件を得た。さらに、そのような解が一意でないような例も与えた。今回の手法を応用することにより、2点境界値問題の符号変化する解の厳密な個数について新たな結果が得られることが期待される。

研究成果の概要（英文）：

In this study, two-point boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations are considered. New results for the uniqueness of sign-changing solutions are established. As its application we have obtained sufficient conditions for the uniqueness of sign-changing radial solutions of boundary value problems of elliptic partial differential equations in a ball. Moreover the nonuniqueness examples for sign-changing radial solutions are also given. It is expected that we can obtain exact multiplicity results for sign-changing solutions of two-point boundary value problems by applying the method used here.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	600,000	180,000	780,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,600,000	480,000	2,080,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：2点境界値問題、符号変化する解、球対称解、Emden-Fowler型方程式、一意性

## 1. 研究開始当初の背景

境界値問題の解の個数に関する研究は、古くは Picard (1908) の結果などもあるが、その後、Kolodner (1955) の研究を経て、Coffman (1967) の結果が発表されたところから多くの研究が行われ、現在まで様々な研究が国内・国外問わず行われている。楕円型方

程式の球対称解の問題も 1970 年代頃から盛んに行われるようになり、現在、その進展はめざましく、これまでに数多くの結果が得られている。これらの問題に対して、正値解に関する結果は非常に多い。それに比べると符号変化する解に対する研究は困難が多く、結果は少ない。その中でも符号変化する解の厳

密な個数、例えば一意性については不明なことが多い。

## 2. 研究の目的

本研究では非線形常微分方程式の2点境界値問題の符号変化する解について研究する。方程式の非線形性については様々なものが考えられるが、本研究では優線形といわれる場合と劣線形といわれる場合を考察する。本研究ではさらに、この問題の研究を基礎として楕円型偏微分方程式のディレクレ問題の球対称解の構造も調べる。その際、領域は、全域、球、円環領域、外部領域の場合を考える。その楕円型偏微分方程式の球対称解はある非線形常微分方程式の2点境界値問題を満たす。さらに、本研究ではより一般的な問題である一次元の  $p$  ラプラス作用素をもつ問題にも取り組む。本研究では、以上の問題の符号変化する解の厳密な個数、特に、一意性について研究する。

## 3. 研究の方法

初期条件をパラメータとする初期値問題を考える。本研究は、その各パラメータに対して、初期値問題の解の零点の分布状況を調べることにより、2点境界値問題について考察するという方法、いわゆる shooting method に基づくものである。初期値問題の解の零点の個数を厳密に数えるにはプリュファ変換とスツルムの比較定理を使う。スツルムの比較定理は大雑把に言うと、2階線形方程式の解の零点の個数と方程式の係数関数との関係を表したものである。エネルギー評価式を利用すると、非線形微分方程式を2階線形方程式とみなしたときの係数関数の部分を評価をすることができ、スツルムの比較定理により解の零点の個数を知ることができる。ただし、その際、ある種の恒等式を発見する必要がある、それを見つけることが最大の鍵である。そのためには過去の文献をよく調べ、そのうえで膨大な計算・試行により、必要な新たな恒等式を発見することができる。しかしながら、やみくもに計算してもそのようなものが発見できないことも予想される。そのため、国内外の研究者と十分な研究連絡・情報交換を行い、様々な研究集会に参加して情報を収集して、より効率的に研究を進める。また、私自身で下記のような二つの研究集会を主催し、各研究者との交流を深め、研究成果を発表し、情報交換を行った。

研究集会名：微分方程式の定性的理論ワークショップ in 岡山理大  
日時：2011年1月22日～23日  
会場：岡山理科大学 25号館5階 22553教室

主催者：杉江 実郎（島根大・総合理工）、田中 敏（岡山理科大・理）、濱谷 義弘（岡山理科大・総合情報）

講演者（所属）講演題目

内藤敏機・申正善  
差分的手法による線形微分方程式の解析

谷口公仁彦（広島大）・宇佐美広介（岐阜大）  
2種の非自励競争モデルの解のある種の大域的漸近安定性

村上悟（岡山理科大）  
線形積分方程式に対する解半群のスペクトルの性質、双線形式および解の漸近公式

田中 敏（岡山理科大）  
Emden-Fowler 型微分方程式の2点境界値問題の正值解について

李 炯宙（東京電気通信大）  
Estimates of the Lyapunov exponents for nonhomogeneous linear systems with almost diagonal coefficients

浜中友紀子（岡山理科大）・濱谷義弘（岡山理科大）  
Existence of pseudo almost periodic solutions of linear Volterra equations

畑沙緒里（島根大）・杉江実郎（島根大）  
概周期係数をもつ半分線形微分方程式系の大域的漸近安定性

Minh Van Nguyen (University of West Georgia, USA)  
Mini evolution semigroups and the asymptotic behavior of almost periodic linear differential equations

古用 哲夫（島根大）  
幾つかの関数方程式の周期解

松永 秀章（大阪府立大）  
無限遅れをもつ線形 Volterra 差分方程式の解の漸近公式

研究集会名：振動理論ワークショップ - 倉敷 2010

日時：2010年2月10日～11日  
会場：岡山理科大学国際交流センター（倉敷市）

主催者：田中 敏（岡山理科大）、内藤 雄基（愛媛大学）

講演者（所属）講演題目

田中 敏 (岡山理科大)  
Emden-Fowler 型常微分方程式の 2 点境界値問題の正値解の非一意性について

宇佐美 広介 (広島大)  
臨界的な場合における準線形常微分方程式の緩減衰解の漸近形 II

川野 日郎 (宮崎大・名誉教授)  
半線形楕円形偏微分方程式系の球対称な正値全域解について

内藤 雄基 (愛媛大)  
2 階線形常微分方程式における条件振動性

谷川 智幸 (熊本大学)  
進みと遅れの変数をもつ 2 階半線形微分方程式の Karamata 関数解について

橋本 貴宏 (気象大)  
Caffarelli-Kohn-Nirenberg 型不等式に関連する非線形楕円型方程式の弱解の非存在について

梶木屋 龍治 (佐賀大)  
1 次元  $p$  ラプラス方程式の正値解の分岐

深貝 暢良 (徳島大)  
臨界型の項をもつ準線形楕円型方程式の正値解について

内藤 学 (愛媛大)  
準線形常微分方程式の解の振動性についての一注意

押目 頼昌, 長岡 武宏 (同志社大)  
 $x'' - (k \sin 2t/t)x = 0$  の解の発散と振動

寺本 智光 (尾道大)  
2 階楕円型方程式系の正値全域解の存在と非存在

吉田 範夫 (富山大学)  
或る半線形楕円型方程式に対する Picone 等式と振動定理

#### 4. 研究成果

今回の研究にていくつかの結果を得ることができた。それは、下記の〔雑誌論文〕にあげた論文にまとめて発表した。〔雑誌論文〕の論文①では、ある 2 階線形微分方程式の無限個の零点をもつ符号変化する解をその曲線の長さによって分類を行った。これまで、無限個の零点をもつ解の曲線の長さについてはほとんど調べられていなかった。この論文を足がかりにして 2 点境界値問題の無限

個の零点をもつ解の個数を調べるということが可能になると期待できる。論文②ではある微分方程式の終局的に正の解の分類を行った。論文③では Emden-Fowler 型と呼ばれる非線形常微分方程式の正値解の一意性に関する新しいタイプの結果を得ている。Emden-Fowler 型方程式という特殊な方程式に問題を限定したおかげで新しい結果を得ることができた。Emden-Fowler 型方程式は特殊な方程式であるが、応用上重要な方程式であり、この結果により様々な応用結果が得られることが期待される。論文④では球状領域における劣線形の場合の楕円型偏微分方程式の境界値問題の符号変化する球対称解の一意性について十分条件を得ている。この問題の正値解の一意性は古くから知られていたが、符号変化する解については自励系の場合以外は知られていなかった。また、この論文では符号変化する解が非一意である例も与えている。論文⑤では、球状領域における優線形の場合の楕円型偏微分方程式の境界値問題の符号変化する球対称解の一意性について十分条件を得ている。これまでに符号変化する球対称解の一意性は一つの結果が得られていたが、この論文ではそれとは別の結果を得ている。また、この論文では符号変化する解が非一意である例も与えている。論文⑥では、一次元の  $p$  ラプラス作用素をもつ問題の正値解と符号変化する解が一意であるための十分条件を得ている。これまでこの問題に関する結果はほとんど得られていなかった。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕 (計 6 件)

① Mervan Pasic and Satoshi Tanaka, Rectifiable oscillations of self-adjoint and damped linear differential equations of second-order, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 査読有、掲載決定

② Taizou Sakamoto and Satoshi Tanaka, Eventually positive solutions of first order nonlinear differential equations with a deviating argument, Acta Mathematica Hungarica, 査読有、127 巻、2010、17-33

③ Satoshi Tanaka, On the uniqueness of positive solutions for two-point boundary value problems of Emden-Fowler differential equations, Mathematica Bohemica, 査読有、135 巻、2010、189-198

④ Satoshi Tanaka, Uniqueness and nonuniqueness of nodal radial solutions of s

ublinear elliptic equations in a ball, *Nonlinear Analysis*, 査読有、71巻、2009、5256-5267

⑤ Satoshi Tanaka, Uniqueness of nodal radial solutions superlinear elliptic equations in a ball, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 査読有、138巻、2008、1331-1343

⑥ Satoshi Tanaka, An identity for a quasilinear ODE and its applications to the uniqueness of solutions of BVPs, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 査読有、351巻、2008、206-217

[学会発表] (計12件)

① 田中 敏, On the nonuniqueness of positive solutions of boundary value problems for superlinear Emden-Fowler equations, *RIMS 研究集会 新しい視点からの現象解析と関数方程式*, 2010年11月12日、京都大学

② Satoshi Tanaka, Uniqueness of positive radial solutions of superlinear elliptic equations in a ball, *8th AIMS International Conference on Dynamic Systems and Differential Equations*, 2010年5月27日、ドイツ ドレスデン

③ 田中 敏, Emden-Fowler 型微分方程式の2点境界値問題の正値解の一意性について、*日本数学会 2009年度年会*, 2010年3月24日、横浜市 慶応大学

④ Satoshi Tanaka, Uniqueness and nonuniqueness of positive solutions for two-point boundary value problems of Emden-Fowler equations, *Japan-Korea Joint Workshop on Dynamical Systems and Related Topics*, 2010年3月3日、韓国 プサン

⑤ Satoshi Tanaka, On the uniqueness of positive solutions of two-point BVPs of Emden-Fowler equations, *Second Chile-Japan Workshop on Nonlinear Elliptic and Parabolic PDE*, 2009年12月2日、東京 明治大学

⑥ Satoshi Tanaka, New sufficient conditions for the uniqueness of positive solutions of boundary value problems of Emden-Fowler equations, *International Workshop on Qualitative Theory of ODEs in Hiroshima 2009*, 2009年11月16日、広島大学

⑦ Satoshi Tanaka, On the uniqueness of positive solutions for two-point boundary value problems of Emden-Fowler differential equations, *Equadiff 12*, 2009年7月23日、チェコ プルノ

⑧ Satoshi Tanaka, Uniqueness of positive solutions for two-point boundary value problems of Emden-Fowler differential equations, *International Workshop on Nonlinear PDE and Applications*, 2009年7月1日、韓国 プサン

⑨ 田中 敏, On the nonuniqueness of nodal radial solutions of sublinear elliptic equations in a ball, *日本数学会 2008年度年会*, 2009年3月26日、東京大学

⑩ 田中 敏, Uniqueness and nonuniqueness of nodal radial solutions of sublinear elliptic equations in a ball, *非線形偏微分方程式における定常問題*, 2008年12月10日、神戸大学

⑪ Satoshi Tanaka, An identity for BVPs with the one-dimensional p-Laplacian and its applications to the uniqueness of solutions, *Intensive Lecture Program and International Conference on Nonlinear PDE and Applications*, 2008年6月13日、韓国 プサン

⑫ Satoshi Tanaka, On the uniqueness of nodal radial solutions of sublinear elliptic equations in a ball, *7th AIMS International Conference on Dyn. Systems, Diff. Equations and Applications*, 2008年5月21日、アメリカ テキサス アーリントン

[その他]

ホームページ等

<http://www.xmath.ous.ac.jp/~tanaka/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

田中 敏 (TANAKA SATOSHI)

岡山理科大学・理学部・准教授

研究者番号：90331959