

機関番号：11601

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008～2010

課題番号：20740085

研究課題名（和文） 複素多様体の解析的集合に関する配置問題の複素幾何的研究

研究課題名（英文） Complex geometric study of analytic subset in complex manifolds

研究代表者

濱野 佐知子 (HAMANO SACHIKO)

福島大学・人間発達文化学類・准教授

研究者番号：10469588

研究成果の概要（和文）：

位相的障碍が存在しクザン第2問題が解けない場合の研究はそれほど進んでいない。クザン第2問題の条件を弱め、与えられた集合を零集合の一部としてもつ正則関数を求める問題は、スタイン多様体においては任意のクザン第2分布に対して解けることが知られている。一方で、幾何学的にはこの問題の解が定める零集合は、与えられた集合に干渉する可能性がある。そこで余零問題について考察し次の結果を得た：2次元スタイン多様体では肯定的に解ける。また、3次元以上では反例を具体的に構成した。

研究成果の概要（英文）：

We may relax the condition in the Cousin II problem, and consider the extra zero problem. We proved that the extra zero problem was solvable for every Cousin II distribution on 2-dimensional Stein manifolds. Moreover, for every  $n \geq 3$ , we gave counterexamples of the extra zero problem.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	500,000	150,000	650,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
総計	1,700,000	510,000	2,210,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：クザン問題、複素多様体、解析的集合、擬凸状領域

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 古典的な Weierstrass の定理の高次元化可能性を問うクザン第2問題は、多変数関数論における複素領域の大域的な性質に関して重要で基本的な問題の一つであり、岡, Cartan, Serre らによってその位相的障碍の非存在（所謂、コホモロジー消滅定理）という形での必要十分条件が与えられるに至り、一応の解決を見た。また、クザン第2問題の条件を弱め、与えられた集合を零集合の一部としてもつ正則関数を求める問題は、

スタイン多様体において任意のクザン第2分布に対して解けることが示されている（岡, Stein）。

一方で幾何学的には、この問題の解が定める零集合は与えられた集合に干渉する可能性がある。そこで、次の余零問題を考える：複素多様体  $X$  上にクザン第2分布  $D = \{(U_i, f_i)\}_{i \in I}$  が与えられているとき、 $X$  における正則関数  $f$  を、各近傍  $U_i$  では  $h_i := f/f_i$  が正則かつ  $\{x \in U_i \mid f_i(x) = h_i(x) = 0\} = \Phi$  を満たすように構成

せよ.このような  $f$  を  $D$  に対する余零問題の解という.

余零問題は自然で基本的な問題であるにもかかわらず, 有効な研究手法の無さゆえに今日まで研究が進まなかった. 実際, この問題は岡の時代から提起されているが, 現在においても古典的な  $C^n$  の領域の場合ですら完全な解決には至っていなかった.

(2) 領域の変分問題に関して, 複素多様体上の領域  $R(t)$  が複素助変数  $t$  と共に関数論的に歪曲しながら変化するとき, 米谷-山口氏は  $R(t)$  上のベルグマン計量  $K(t, z)|dz|$  の動きを  $t$  についての 2 階変分を用いて明記し, 複素 2 次元領域が擬凸状ならば  $\log K(t, z)$  は多重劣調和関数であることを示した. B. Berndtsson 氏その変分公式を高次元に拡張した. M. Brunella 氏など領域変分理論は最近ヨーロッパで正則葉層理論の観点から注目されている.

## 2. 研究の目的

(1) 余零問題は複素多様体の解析的集合に対する正則関数の存在問題であり, 領域およびその解析的集合の解析性および幾何学性の両方に関係する問題である. 本研究では, 余零問題の可解性の限界を明らかにし, 余零問題を解析的集合に関する配置問題として幾何学化して捉え直すことで, 複素多様体における余零問題のより精密な研究を行うことを目的とする. その結果として, 余零問題の反例で既約な解析的集合の存在も示す.

(2) 領域の変分問題に関して, 複素助変数  $t$  と共にリーマン面  $R(t)$  が動いたときに, 各リーマン面の等角写像に関連したモジュールが複素多変数的に変動するようなものを(例えばリーマン面のスパン)を見つけ, 一変数的量変動と多変数関数論, 特に擬凸状領域との関連を引き起こす原理を追求することが目的である.

## 3. 研究の方法

(1) 余零問題が正則関数の存在問題であると同時に, 解析的集合の配置の問題であり, 実多様体における結び目・絡み目理論と対応するところが認められることから, 解析的集合に関する配置問題として幾何学化して捉え直すことにより, その解決を図ろうと試みた.

また, 余零問題の解が存在しないような更なる解析的集合を構成し, 多様性を解明すると共に, それらの特徴付けを幾何学的観点からも考察することで, 領域およびその

解析的集合の与え方と余零問題の可解性の限界との関係を解明する考察に関して, 正則性の概念の拡張およびその周辺の概念を用いた.

さらに, 余零問題が肯定的に解決される場合についての一般化は, コホモロジー理論を用いる一般論からアプローチし, 岡の原理の拡張・一般化およびルンゲ性との同値性など最新の知見を駆使した.

(2) 領域の変分問題に関して,  $L_1$ -主関数が誘導する正則写像は  $t$  を固定するごとに多重連結領域を円弧スリット領域に等角に写す. そこで, 複素 1 変数関数論で好対の放射スリット領域への等角写像が誘導する  $L_0$ -主関数について領域が複素パラメータと共に変動した場合に同様の考察をした.

(3) リーマン面の等角写像に関連したモジュールを見出すことで, 一変数的量変動と多変数関数論, 特に擬凸状領域との関連を引き起こす原理を追求するために, 等角写像論やポテンシャル論的手法からアプローチしながら, 具体例の構成を通し多様性を解明すると共に, 多変数関数論的性質を明らかにした.

## 4. 研究成果

(1)  $C^n$  の直積領域に制限することで余零問題の解決に成功した. クザン第 2 問題の可解性を交点数を用いて特徴づけることにより, 余零問題の解の存在について  $C^2$  の直積領域において肯定的に解決した. また,  $C^n$  ( $3 \leq n$ ) においては具体例を与えることにより否定的に解決した. しかし, より広い範疇における任意の解析的集合に対して肯定的解答を与えるような領域の限界, また, 否定的解答を与える領域およびその解析的集合の分類, 余零問題の反例として既約な解析的集合の存在については更なる研究を要する.

(2) グリーン関数と同じ対数極  $\log 1/|z|$  をもち  $L_1$ -境界条件 (全ての境界成分で定数かつフラックス 0) を満たす調和な  $L_1$ -主関数  $p(t, z)$ , および 2 つの対数極  $\log 1/|z|$ ,  $\log|z-1|$  をもつ  $L_1$ -主関数について考察し,  $R(t)$  上の  $L_1$ -定数  $\alpha(t)$  の動きを  $t$  についての 2 階変分公式を用いて明記した. これは米谷-山口のロバン定数の変分公式と同じである. しかし, ロバン定数の変分公式はグリーン関数を変形すると変動領域の境界の定義関数になることを本質的に使って証明されていたため, 主関数については適用できず, 新しいアイデアが必要であった. 変分公式により, 複素 2 次元領域が擬凸状ならば

$\alpha(t)$ は  $B$  上劣調和であり, 応用として, 種数が 2 以上のコンパクトリーマン面のショットキー被覆  $S(t)$  からなる変動は  $B \times P^1$  の単葉領域に同時一意化可能を示し, 多変数関数論的に捕らえることに成功した.

(3) 領域の変分問題に関して, 予想に反し対数極を 1 つもつ  $L_0$ -主関数  $q(t, z)$  から誘導される  $L_0$ -定数では  $L_1$ -定数と同様の変分公式は成立しないことが判明した. しかしながら, 対数極を 2 つもつ  $L_0$ -定数  $\beta(t)$  についてはリーマン面の種数に関する積分項を含む形の 2 階変分公式が成立することを証明した.

(4) 開リーマン面  $R(t)$  が複素助変数  $t$  と共に関数論的に歪曲しながら変化するとき, 各リーマン面の調和スパン  $s(t)$  の動きについての 2 階変分公式を明記し, 擬凸状の変動のもとで調和スパンは複素多変数的に変動する結果が得られつつあり, 今後の課題となった.

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 8 件)

- ① Sachiko Hamano, Variation formulas for  $L_1$ -principal functions and application to the simultaneous uniformization problem, Michigan Mathematical Journal, 査読有, 掲載確定, 2011.
- ② Sachiko Hamano, Fumio Maitani and Hiroshi Yamaguchi, Variation formulas for principal functions (II) Application to variation for harmonic spans, Nagoya Mathematical Journal, 査読有, 掲載確定, 2011.
- ③ Sachiko Hamano, Variation formulas for principal functions and harmonic spans, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 1694 巻, 2011 年, 121-130.
- ④ Sachiko Hamano, Fumio Maitani and Hiroshi Yamaguchi, Several complex variable's property of harmonic span for Riemann surface, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 1694 巻, 2011 年, 131-143.
- ⑤ Sachiko Hamano, Variation formulas for principal functions and spans of Riemann surfaces, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 1661 巻, 2009 年, 21-28.
- ⑥ Sachiko Hamano, Variation formula and application to simultaneous uniformization problem, The Proceedings of the Twelfth Conference

on Real and Complex Analysis in Sendai, 査読無, 2009 年, 33-38.

- ⑦ Sachiko Hamano, Rigidity of Bergman length on Riemann surfaces under pseudoconvexity, Complex Analysis and its Applications, The Proceedings of the 15<sup>th</sup> International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, OCAMI Studies, 査読有, 2008 年, Vol2, 191-194.
- ⑧ Sachiko Hamano, Variation formulas for  $L_1$ -principal functions and applications, ポテンシャル論研究集会, 査読無, 2008 年, 105-109.

[学会発表] (計 21 件)

- ① 濱野佐知子, 主関数の変分公式とその応用, 福島応用数学研究集会, 2011 年 3 月 10 日, 福島こらっせ.
- ② 濱野佐知子, 主関数の 2 階変分公式とその応用, 複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺, 2010 年 11 月 27 日, 龍谷大学セミナーハウスともいき荘.
- ③ Sachiko Hamano, Variation formulas for principal functions and applications, Geometry of complex manifolds IV, 2010 年 10 月 29 日, Center International de Rencontres Mathematiques (France).
- ④ 濱野佐知子, Variation formulas for principal functions, 東京工業大学複素解析セミナー, 2010 年 10 月 19 日, 東京工業大学.
- ⑤ 濱野佐知子, Variation formulas for principal functions, 日本数学会函数論分科会特別講演, 2010 年 9 月 23 日, 名古屋大学.
- ⑥ 濱野佐知子, A remark on  $C^1$  subharmonicity of the harmonic spans for discontinuously moving Riemann surfaces, 日本数学会, 2010 年 9 月 23 日, 名古屋大学.
- ⑦ 濱野佐知子, 多変数関数論の基礎, 第 45 回函数論サマーセミナー企画講演, 2010 年 8 月 27 日, ヒルズサンピア山形.
- ⑧ 濱野佐知子, A remark on  $C^1$  subharmonicity of the harmonic spans for discontinuously moving Riemann surfaces, 東京大学複素解析幾何セミナー, 2010 年 6 月 21 日, 東京大学数理科学研究科.
- ⑨ 濱野佐知子, Variation formulas for principal functions (I) & (II), 第 52 回函数論シンポジウム, 2009 年 11 月 22 日, 大阪府立大学.
- ⑩ 濱野佐知子, Variation formulas for principal functions (II), 東京大学複

- 素解析幾何セミナー, 2009年10月19日, 東京大学数理科学研究科.
- ⑪ 濱野佐知子, 変化する領域の analytic span の多変数関数論的性質, 日本数学会, 2009年9月27日, 大阪大学.
  - ⑫ Sachiko Hamano, Variation formulas for principal functions (I), Hayama Symposium on Complex Analysis in Several Variables XIII, 2009年7月21日, Shonan Village Center.
  - ⑬ Sachiko Hamano, Variational formula for principal function and its applications, Special Lectures on Complex Analysis and Geometry, 2009年2月9日, Pohang University of Science and Technology, Pohang (KOREA).
  - ⑭ Sachiko Hamano, Variations in spans of Riemann surfaces under pseudoconvexity, Special Lectures on Complex Analysis and Geometry, 2009年2月10日, Pohang University of Science and Technology, Pohang (KOREA).
  - ⑮ 濱野佐知子,  $L_1$ -主関数に関する2階変分公式とその応用について, 島根大学松江セミナー, 2009年1月14日, 島根大学総合理工学部.
  - ⑯ 濱野佐知子, 開リーマン面のスパンの動きについて, リーマン面・不連続群論, 2009年1月10日, 大阪大学.
  - ⑰ 濱野佐知子, Variational formulas for principal functions and for spans of Riemann surfaces, 葉層の微分幾何とベルグマン核, 2008年12月15日, 京都大学数理解析研究所.
  - ⑱ Sachiko Hamano, Variational formula and application to simultaneous uniformization problem, The 12<sup>th</sup> Korea-Japan Seminar on Real and Complex Analysis, 2008年12月4日, 東北大学.
  - ⑲ 濱野佐知子, Variational formulas for  $L_1$ -principal functions and applications, 2008年度ポテンシャル論研究集会, 2008年11月2日, 秋田市明德館ビル2階カレッジプラザ.
  - ⑳ 濱野佐知子,  $L_1$ -主関数に関する2階変分公式と Schottky covering の同時一意化について, 日本数学会, 2008年9月25日, 東京工業大学.
  - ㉑ 濱野佐知子,  $L_0$ -主関数に関する2階変分公式と開リーマン面の span の動きについて, 日本数学会, 2008年9月25日, 東京工業大学.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

濱野佐知子 (HAMANO SACHIKO)  
福島大学・人間発達文化学類・准教授  
研究者番号: 10469588