

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 8 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008～2011

課題番号：20740089

研究課題名（和文） パンルヴェ系を中心とした可積分系の研究

研究課題名（英文） Study on integrable systems around the Painleve systems

研究代表者

坂井 秀隆（SAKAI HIDETAKA）

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：50323465

研究成果の概要（和文）：

本研究課題に置ける成果として、(1)有理楕円曲面上の常微分方程式に関する研究、(2)フックス型方程式の変形理論に付随する4次元パンルヴェ型方程式の分類（ガルニエ系、藤・鈴木系、笹野系、行列パンルヴェ系の4種類）、(3)非分岐な線型方程式に付随する4次元パンルヴェ型方程式の分類（2種類）（川上氏、中村氏との共同研究）、(4)フックス型方程式に関する N. Katz による中間畳み込みの理論の  $q$  差分類の考察（山口氏との共同研究）、(5)シンプレクティック構造を用いたシュレジンガー変換の離散ハミルトン系としての記述（A. Dzhamay 氏、竹縄氏との共同研究）を得た。論文による発表が遅れているが、今後順次投稿していきたい。

研究成果の概要（英文）：

Results which are obtained in the present project are as follows: (1) A study on ordinary differential equations on rational elliptic surfaces, (2) A classification of 4-dimensional Painleve type equations associated with isomonodromic deformation theory of Fuchsian equations (4 types), (3) A classification of 4-dimensional Painleve type equations obtained from unramified linear equations (22 types)(joint work with H. Kawakami and A. Nakamura), (4)  $q$ -analog of Katz's middle convolution (joint work with M. Yamaguchi), (5) A description of Schlesinger transformation obtained by using symplectic structure (joint work with A. Dzhamay and T. Takenawa).

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：大域解析学

科研費の分科・細目：可積分系

キーワード：パンルヴェ方程式，差分方程式，特殊函数

## 1. 研究開始当初の背景

研究領域は非線型可積分系といわれる分野である。非線型の函数方程式については、線型の同様な問題と比べて有効な一般論を構築す

ることが難しい。解となる函数の具体的な性質にいたっては、代数函数や超幾何函数などのよく知られた特殊函数によって具体的に記述できる特別な場合を除くと、なかなか解析

ができないのが現状である。一方で、楕円函数、超幾何函数などの特殊函数によってひとたび記述されてしまえば、劇的にいろいろな計算が可能となってくる。

楕円函数などのよく知られた特殊函数とは別の新しい特殊函数を作ろうという試みは当然のもので、パンルヴェ方程式はこのような意図の下、二十世紀はじめに発見され、しばらくの沈黙を置き、1970年代の Wu 氏らによる可解格子模型の相関函数の記述などに数理解論への応用を見出し、岡本和夫氏による初期値空間の構成、アフィン・ワイル群対称性の定式化、更に、梅村浩氏の微分ガロア理論を用いた既約性の証明と盛んに研究されてきた。

## 2. 研究の目的

パンルヴェ方程式などで定義される函数の仲間に対して、代数幾何学的手法を使って、特殊函数論としての理論を構築しようと考えている。本研究課題以前の研究によって、周辺の問題を整理することができ、いくつかの拡張的な問題に対する理論の構築が行えた。研究内容、研究目的については重要な問題を考えているという認識があるので、引き続いて同様の問題意識で研究を続けていきたいと考えていた。この際、とくに、20世紀終わりころから盛んになったパンルヴェ方程式の離散化の理論と、筆者が主に関わった有理曲面の理論が、このための鍵になると考える。

## 3. 研究の方法

(1) アイディアを思いつづための数学的対象に関する思考実験、計算、文献調査、(2) 共同研究者との議論、アイディアの交換、(3) 国内外の研究者たちとの交流、議論。とくに、セミナー、研究集会などに多く参加すること。人に話をすること、人の話を聞くこと。

## 4. 研究成果

本研究課題に置ける成果として、(1) 楕円曲面上の常微分方程式に関する研究、(2) フックス型方程式の変形理論に付随する4次元パンルヴェ型方程式の分類（ガルニエ系、藤・鈴木系、笹野系、行列パンルヴェ系の4種類）、(3) 非分岐な線型方程式に付随する4次元パンルヴェ型方程式の分類（22種類）（川上氏、中村氏との共同研究）、(4) フックス型方程式に関する N. Katz による中間畳み込みの理論の  $q$  差分類似の考察（山口氏との共同研究）、(5) シンプレクティック構造を用いたシュレジンガー変換の離散ハミルトン系としての記述（A. Dzhamay 氏、竹縄氏との共同研究）を得た。論文による発表が遅れているが、今後順次投稿していきたい。

(2) と (3) の結果については、パンルヴェ方程式の様々な高次元への拡張に対して、ひとつ

の全体像を与える結果であり、非常に重要な成果だったと思っている。大島利雄氏らの最近の線型方程式に関する研究に対しても、rigid でない場合の研究にたいする重要な動機付けになったと思っている。

(4) の結果についても、これからさまざまな分野と結びついた研究へとつなげるための重要な足がかりになると思う。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 0 件)

[学会発表] (計 7 件)

① 坂井秀隆, Monodromy preserving deformation and 4-dimensional Painleve type equations, From Painleve to Okamoto, 2008年6月10日, 東京大学

② 坂井秀隆, モノドロミー保存変形と4次元パンルヴェ型方程式, 微分方程式のモノドロミーをめぐる諸問題, 2009年2月4日, 京都大学数理解析研究所

③ 坂井秀隆, 4次元パンルヴェ型方程式の退化図式 (川上拓志氏, 中村あかね氏との共同研究), 可積分系数理の多様性, 2010年8月19日, 京都大学数理解析研究所

④ 坂井秀隆, モノドロミー保存変形と4次元パンルヴェ型方程式, 日本数学会秋季総合分科会, 2010年9月22日, 名古屋大学

⑤ 坂井秀隆, Frontier of isomonodromic deformation theory, Infinite Analysis 11, Frontier of Integrability, 2011年7月25日, 東京大学

⑥ 坂井秀隆, Ordinary differential equations on rational elliptic surfaces, Symmetries, Integrable Systems, and Representations, 2011年12月14日, University Lyon 1, Lyon, France

⑦ 坂井秀隆, Degeneration scheme of 4-dimensional Painleve type equations (Joint work with H. Kawakami and A. Nakamura), Joint Mathematics Meetings, AMS Special Session, 2012年1月6日, Hynes Convention Center, Boston, USA

[その他]

ホームページ等

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/teacher/sakai.html>

<http://researchmap.jp/sky/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

坂井 秀隆 (SAKAI HIDETAKA)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：50323465