様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年６月１７日現在

機関番号：１２６１４
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2008～2011
課題番号：20740090
研究課題名（和文）　空間非一様な非線型反応拡散方程式系がうみだす空間パターンにおける集中現象
研究課題名（英文）Concentration phenomena in spatially inhomogeneous nonlinear reaction-diffusion systems

研究代表者　中島主恵（NAKASHIMA KIMIE）
東京海洋大学・海洋科学技術研究科・准教授
研究者番号：10318800

研究成果の概要（和文）：
非線型反応拡散系において拡散係数を微小にすると，しばしば方程式系の解が遷移層を形成することが知られています．遷移層とは解の値がほとんど不連続にみえるほど急激に変化している部分をいいます．本研究では空間的に非一様な非線型反応拡散方程式で記述される遺伝子頻度のモデルを扱い，その遷移層をもつ定常解（平衡解）が（線形）安定であること，またある条件のもと遷移層をもつ定常解が一意に決定されることを数学的に厳密に証明しました．

研究成果の概要（英文）：
In reaction-diffusion systems, when diffusion coefficients are very small, solutions sometimes form transition layers. In this research, we consider a model in population genetics which is described by a reaction diffusion equation. We will rigorously prove, under certain conditions, that this equation has a unique nontrivial steady-state, it is linearly stable and has transition layers.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2009 年度	977,774	293,332	1,271,106
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総　計	3,477,774	1,043,332	4,521,106

研究分野：
科研費の分科・細目：数学　大域解析学
キーワード：非線形現象，反応拡散方程式系，特異摂動問題，遷移層

１．研究開始当初の背景
拡散は一般に均一化を促すと考えられている．実際に単独の自励系においてはこの事実を裏付ける結果が数多くある.俣野(1978), Casten-Holland(1979), Hale-Vegas(1984), 神保-森田(1992) により，凸領域上の安定定常解は定数解に限ることが明らかになった．``安定定常解なら自明解である"というこれらの結果は，単独方程式において拡散はパターン形成を抑制する働きをもつことを示唆している．
では次に反応項が空間に対して非一様な場合には``安定定常解なら自明解である"という事実は成り立たず，定常解は安定であっても実にさまざまな形状をもちうることが知られている．例えば Angenent-Mallet Paret-Peliter(1978) は１次元の区間において空間非一様な方程式を拡散係数を微小に

した状況下で扱い``遷移層" --- 遷移層とは解の値がほとんど不連続にみえるほど急激に変化している部分である --- を複数個もつ解を多数構成している．これらの結果により，空間一様の状況下では空間的に非一様な安定解は存在しえないが，反応項に少しでも空間的摂動を加えると空間１次元の領域上であっても非常に大きなギャップをもつ安定定常解が多数現れることがわかった．空間非一様性が拡散と微妙なバランスをとり空間パターンをうみだすのである．方程式の空間非一様性は，定常解全体の構造や時間依存解のダイナミクスを豊かなものにすると期待し，以下のような``非一様性”を研究テーマにした．では如何なる空間非一様性を方程式にあたえると如何なる変化が解にもたらされるのか？この問題にたいし以下のようなアプローチにより研究を進めた．

２．研究の目的

非線型反応拡散系において拡散係数を微小にすると，解が遷移層やスパイクなどの際立ったパターンを形成することが知られている．本研究では空間的に非一様な非線型反応拡散方程式を扱い，定常解全体の構造や時間依存解のダイナミクスに空間的非一様性がいかなる影響をあたえるかを明らかにする．特に空間非一様性と定常遷移層や定常スパイクの位置や安定性との関連を研究する．

Angenent-Mallet Paret-Pelitier が遷移層を持つ安定定常解を構成した結果に触発され,申請者は Allen Cahn 方程式とよばれる equal well depth 型の双安定型応拡散方程式を１次元区間上ノイマンゼロ境界条件で考えた．この方程式は物理学における相転移問題，数理生態学などにあらわれる．申請者(2003,JDE)において，一箇所に複数の遷移層が折り重なって現れる，多重遷移層をもつ定常解の存在を示し，遷移層の配置および個数と解のモース指数(不安定指数)との関係を完全に解明した．定常遷移層の配置とモース指数の関係を完全に解明した研究は以前になく，上記の申請者の研究に触発されて，Ai-Hastings-X.Chen(2005)，浦野-申請者-山田(2005) は,やや異なるクラスの１次元の双安定型方程式を研究し，この方程式の定常解は遷移層のみでなくスパイクを持ちうることを示すと同時に，遷移層とスパイクの配置から解のモース指数が決定されることを示した．これら３つの研究により１次元区間上のこの方程式系の定常解の構造がかなりの部分明らかになった．

これらの結果を空間２次元以上の場合に拡張することは多くの研究者によって試みられている．空間２次元以上の場合には，１次元の場合にくらべ遷移層の形状が多様で複雑になるため遷移層の様子を解析することは難しい．そこで領域を球対称に限り１次元の方法を改良し適用できるようにした研究がある．Dancer-Yan(2004) は，双安定型の方程式のなかでもポテンシャルの形が場所によって異なるようなものを扱い，折り重なった遷移層をもつ球対称定常解の存在と形状に関する結果を得た．この結果により球対称定常解と１次元の解とは酷似した形状をもつことがわかった．これに続き Du-申請者(2007,JDE)は，Dancer らと同じ非線型項を考え，孤立遷移層（折り重なっていない遷移層）のみをもつ定常解のモース指数は拡散係数を無限小とするとともに無限大に発散することを厳密に証明した．この結果により，形状のそっくりな空間次元１次元の解と空間多次元の球対称解の安定性はまったく異なるものであることがわかった．例えば１次元の単独遷移層のモース指数は高々１であるが，多次元球対称解の単独遷移層のモース指数は拡散係数を無限小とするとともに限りなく大きくなる．

３．研究の方法

領域を球対称などの特別な領域に限らず，多次元の一般の領域を扱った研究には Sakamoto-Nefedof(2001)，Wei(2010)，Li-申請者(2012，DCDS-A)などがあり，Li-申請者(2012，DCDS-A)では遷移層のあらわれうる位置がある界面方程式の定常解の近傍のみであることを証明し，実際にその近傍に安定遷移層を構成できることを示した．さらに本研究では多次元の領域上で，方程式系の非一様性と遷移層の形状や安定性との関連について研究した．とくに１次元の場合にはおこりえない空間多次元独特の現象を発見し，その証明を数学的に厳密な意味で与えた．

次に本研究では遺伝子頻度モデルに現れる定常遷移層の研究をすすめた．双安定型反応拡散方程式はその非線形項のポテンシャルが２つの安定平衡点をもつことから「双安定型」とよばれ，単安定型反応拡散方程式とともに遷移層やスパイクをうみだす方程式として実に多くの研究がすすめられてきた．ではこれらのほかに解が遷移層やスパイクなど顕著な空間パターンを形成する方程式にはどのようなものがあるだろうか．本研究では前述双安定型方程式の研究を発展させる１つの方向として，双安定型，単安定型のどちらにも含まれない反応拡散方程式で記述される遺伝子頻度モデルの定常問題を研究した．この方程式の非線形項のポテンシャルは，ある場所では単安定になるがそれ以外の場所では安定平衡点を持たない．場所によって方程式の構造がまったく異なるので解の挙動も空間非一様性に大きく影響されることが Brown-Hess(1990)，Lou-Nagylaki

(2002)などの結果から予想されていた．この方程式の定常解が形成するパターンと解の安定性についての解析をおこなった.

４．研究成果
ある非線型反応拡散方程式であらわされる遺伝子モデルを１次元区間(0,1)上ノイマンゼロ境界条件のもとで考える．この方程式の挙動は環境変数 g(x)につかさどられることが本研究により明らかになった．方程式の形を数学的に説明すれば，ある領域上ではこの方程式がもつ非線型項のポテンシャルは唯１つの安定平衡点を持ち単安定型になっている．一方，他の領域上では方程式がもつ非線型項のポテンシャルは１つも安定平衡点をもたない．この方程式はいかなる g(x) にたいしても自明な定数解１と０をもつので，自明な定数解以外に非定数定常解を見つけることを目的とする．次のような数学的な既存の結果がえられている．まず申請者-Ni-Su(2010)が遷移層をもつ安定定常解を構成している．この定常解を Type(NNS)とよぶ．これに続き Lou-Ni-Su (2010)は，Type(NNS)の定常解のほかに定常解が少なくとも１つ以上存在することを証明した．一方，本研究では以下のような事実を数学的に厳密に証明した.
成果１．この反応拡散方程式の非定数定常解は g(x)=0 をみたす点の近傍のみで遷移層をもち，他の場所では０か１に近い値をとる.
成果１は以下のように証明する． 領域内の任意の点の近傍に遷移層をもつ優解の族あるいは劣解の族を構成し，背理法を用いる.
成果１により定常解の形状は集合 の形状により何種類かのタイプにはっきりと分類されることが明らかになった．例えば{g(x)>0}が１個の連結な区間からなるときには２通りの解の形状が期待される． 同様に {g(x)>0} がｎ個の連結領域からなるとすると，定常解の形状は２のｎ乗個のタイプに分類される.
成果２．遷移層をもつ定常解はすべて線型安定である.
成果２の証明の方針は以下のようである．各非定数定常解における線形化固有値問題をえる．ミニ・マックス原理とストゥルム・リュウビルの定理を組み合わせて用いる.
これら２つの予想に錐上の写像度の理論を適用すると次の成果が得られる.
成果３．非定数定解は Type(NNS)の定常解であるか常に０の近傍に値をとるかのどちらかに限られる．なお Type(NNS)の定常解は２つ以上存在し得ない.
成果４．g(x)の(0,1)区間上積分が正ならば，Type(NNS)の非定数定常解が一意に存在する.
これらの予想が証明されればこの本方程式の定常解集合の構造が完全に近い形で解明されたといってよく，g(x)の(0,1)区間上積分が正ならば Type(NNS)の非定数定常解が一意である．一方 g(x)の(0,1)区間上積分が負ならば Type(NNS)の非定数定常解が１つと，そのほかに０の近傍に非定数定常解が少なくとももう１つ存在する.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）
1. Fang Li and <u>Kimie Nakashima</u>, Transition layers for a spatially inhomogeneous Allen-Cahn equation in multi-dimensional domains Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A (DCDS-A) (2012) 1391-1420 Vol.32 doi:10.3934/dcds.2012.32.1391（査読あり）.
2. Linlin Su, <u>Kimie Nakashima</u>, Wei-Ming Ni, An Indefinite Nonlinear Diffusion Problem in Population Genetics I: Existence and Limiting Profiles, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A, 27(2010) 617-641. doi:10.3934/dcds.2010.27.617（査読あり).
3. Fang Li, <u>Kimie Nakashima</u> and Wei-Ming Ni, Stability from the point of view of diffusion, relaxation and spatial Inhomogeneity, Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A, 20(2008) 259-274.（査読あり).

〔学会発表〕（計２件）
1. <u>Kimie Nakashima</u>, Location of layers for a spatially inhomogeneous balanced bistable equation, 「非線形解析と可積分系の数理」２０１０年１１月１８日,龍谷大学（招待講演）
2. <u>Kimie Nakashima</u>, Transition layers for a spatially inhomogeneous Allen-Cahn equation in multi-dimensional domains, 「Nonlinear Evolutionary PDEs and their Equilibrium States」２０１０年６月１１日,早稲田大学（招待講演）

６．研究組織
(1)研究代表者

中島主恵 (NAKASHIMA KIMIE)
東京海洋大学・海洋科学技術研究科・准教授
研究者番号：10318800