様式Ｃ－１９

# 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年　６月　５日現在

機関番号：13901
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2008～2011
課題番号：20740092
研究課題名（和文）
　複素力学系の剛性問題への双曲幾何的アプローチ
研究課題名（英文）
　Hyperbolic geometric approaches to rigidity problems in complex dynamics
研究代表者
　川平　友規（KAWAHIRA TOMOKI）
　名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授
　研究者番号：50377975

研究成果の概要（和文）：複素力学系理論とは，複素数全体の集合（もしくはそれを拡張した空間）にある種の運動法則を与えた系を考え，その時間発展を解析する理論である．系の運動法則をわずかに変化させた場合，系全体が安定に変化する場合とカオス的に変化する場合があるが，じつは「ほとんどの場合」，安定していることが知られている．本研究では，その「ほとんど」を占めるものが何か特定することを目標とし，おもに幾何学的アプローチによる研究を行った．

研究成果の概要（英文）：A complex dynamics is a system where the complex numbers move according to a deterministic law of motion. When we perturb the law of motion, the system may be stable, or change in a chaotic way. However, it is known that "in most cases", such systems are stable. The aim of this research was to characterize such stable systems in a geometric approach.

交付決定額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合　計 |
|---|---|---|---|
| 2008年度 | 800,000 | 240,000 | 1,040,000 |
| 2009年度 | 800,000 | 240,000 | 1,040,000 |
| 2010年度 | 700,000 | 210,000 | 910,000 |
| 2011年度 | 800,000 | 240,000 | 1,040,000 |
| 総　計 | 3,100,000 | 930,000 | 4,030,000 |

研究分野：１次元複素力学系
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：複素力学系，双曲的力学系の稠密性，剛性

## １．研究開始当初の背景

複素平面に無限遠点を加えた Riemann 球面上に有理関数が与えられているとき,その関数を繰り返し合成して得られる力学系を（1次元）複素力学系とよぶ．

また,複素力学系と双璧をなす正則力学系として，Klein 群がある．Klein 群とは Riemann 球面の自己同型群の,さらなる離散部分群である．80 年代初頭，Sullivan はこれらふたつの正則力学系の類似点を列挙する辞書「Sullivan の辞書」を提唱し,方法論の共有を謳った．彼自身，Klein 群の方法論を複素力学系に適用することで，20 世紀初頭から停滞していたこの分野を現代的な理論として復活させた．

その後９０年代前半，Lyubich と Minsky は Klein 群に付随する３次元双曲多様体のアナロジーとして,複素力学系に付随する 3 次元双曲ラミネーションの理論を提唱した．これは３次元双曲

多様体が Klein 群にとって「幾何学的実現」であるのと同じ意味で，複素力学系の「幾何学的実現」と考えられる（『Sullivan の辞書』）．彼らは 3 次元双曲多様体の剛性定理の証明を応用し，Thurston による複素力学系の剛性定理をより広範に拡張するなどの成功を収めた．また，Lyubich と Kaimanovich は近年 Klein 群にも 3 次元双曲ラミネーションを定義し，理論の守備範囲を広げている．

２．研究の目的

本研究は上述のような複素力学系と Klein 群の間のアナロジーに基づき，これらふたつの正則力学系に対し，「ラミネーション」をキーワードにした「剛性」（複素・双曲構造の変形阻害性）研究にアタックしていく．

ここで「剛性」とは何か，少し説明をしておこう．一般に複素力学系が与えられたとき，その力学系を適当な Riemann 球面から自身への同相写像を通して観測する状況を考えてみる．こうして観測される力学系はもとの複素力学系の位相的変形を与えていると解釈できる．さてもし，この位相的変形が再び複素力学系として観測されたとしよう．一般に，こうして得られる複素力学系のバラエティーには，もとの力学系に応じたかなり強い制限がかかることが知られている．こうした複素力学系のカテゴリー内での変形阻害性を力学系の「剛性」とよぶ．

たとえば有限体積の完備 3 次元双曲多様体を生成する Klein 群は「Mostow 剛性」とよばれる強い剛性をもつことが知られており，Klein 群として本質的に異なるものに変形することはできない．複素力学系にも同様の剛性が存在することを最初に示したのは，3 次元双曲多様体論の教祖ともいえる Thurston であった．

さらに，力学系をカオス部分に制限した場合，その部分的な力学系の位相的（擬等角的）変形および剛性も考えることができる．じつは複素力学系における最重要な未解決問題である「双曲稠密性予想」が，そのようなカオス部分における力学系の剛性を証明することで導かれることが知られているのである．本研究が最終的に目指すのも，この予想へのアプローチとしての剛性研究である．

３．研究の方法

上記の Lyubich-Minsky の 3 次元双曲ラミネーション理論での成功をベースに，双曲幾何学的手法を複素力学系に適用することが主な方針とした．

より具体的には，彼らの理論の基礎となる複素力学系に付随するリーマン面ラミネーションの理論を拡張し，より広範な力学系について剛性が証明できるような枠組みづくりをめざした．

まず最初のアプローチとして，Zalcman の補題とよばれる関数論的手法をもとに，力学系に対してある種の不変性をもつ有理形関数族を生成し，その適当な商空間を考えることで，新たにリーマン面ラミネーション（Zalcman ラミネーション）を構成した．これは Lyubich-Minsky 理論に現れるリーマン面ラミネーションを含む（もしくは一致する）ラミネーションである．

つぎにこのラミネーションをさらに「局所化」し，力学系によって不変な解析関数の芽の空間を構成し，カオス部分の変形がその切断に持ちあげられる様子を記述することで，力学系の剛性を導く，というアプローチを試みた．

また，このようにして得られるラミネーションの基本的構造について，解析的・幾何学的な視点から研究を行った．

４．研究成果

（１）P. Haissinsky と Martin-Mayer は弱双曲的とよばれるクラスの複素力学系の剛性を関数論的手法で証明し，Lyubich-Minsky の剛性定理を拡張した．この定理の証明手法とと Lyubich-Minsky のオリジナルの証明手法の間には一見関連が無いように見えるのだが，上記の Zalcman ラミネーションを用いることで統一的な解釈が可能になった．とくに，これらの剛性定理の証明で重要な役割を果たすカオス部分の「錘点」とよばれる点について，統一的な解釈が可能となった．この結果はプレプリントとしてまとめ，現在投稿中である．

（２）2 次多項式による複素力学系の族は本質的にひとつの複素パラメーターによって記述される．いわゆる Mandelbrot 集合は，そのようなパラメーター平面における力学系のカタログである．すなわち，Mandelbrot の集合の特定の部位には，特定の性質の力学系が対応する．その対応関係は，Douady－Hubbard 理論として 80 年代半ばまでにまとめられている．

その中でも，Tan の定理とよばれる興味深い現象が知られている：Mandelbrot 集合において Misiurewicz 点とよばれるパラメーターの付近を拡大すると，対応する力学系のカオス部分（Julia 集合）を，パラメーターとおなじ座標値で拡大したものを回転・拡大したように見えるのである．これらは完全に一致するわけではないが，拡大率を無限大にした

際の「極限」の集合は，コンパクト集合間の違いを測るハウスドルフ距離の意味で一致する．

この結果は半双曲的とよばれるクラスにまでRivera-Letelierによって拡張されていたが，証明手法は全く異なる．

本研究では「Zalcman の補題」とよばれる正則関数族の正規性の判定条件件を応用し，これらTanの結果およびRivera-Letelierによる結果に対する統一的かつ簡素な証明を与えた．また同様の手法により，弱双曲的な有理関数のJulia集合が拡大に関する自己相似性をもつことを示した．

この結果もプレプリントとしてまとめ，現在投稿中である．

（３）C.Cabrera との共同研究で，2 次多項式に付随するラミネーションの構造決定に関する研究を行った．

現在２次関数族の研究で主要な研究対象となっているのが，「無限回くりこみ可能」と呼ばれるクラスである．これらのパラメーター付近では Mandelbrot 集合の性質で未解決な部分が多く，このクラスについて完全に理解されれば２次関数族の最重要予想（双曲稠密性予想，etc. ）が一気に解決されることが知られている．

本研究では，無限回くりこみ可能な２次関数の分岐点軌道が幾何学的に良い性質（「ア・プリオリ評価」）をもつ場合を考え，そのラミネーションの構造が「くりこみ」の組み合わせ的性質を反映したブロックに分割できることを示した（「構造定理」）．

さらに，双曲多様体論における Mostow 剛性の類似として，「ア・プリオリ評価」をもつ２次関数に対応するパラメーターにおいてMandelbrot集合が局所連結であれば，ラミネーションの位相が 2 次関数のパラメーター自身の値を決定することを証明した（「剛性定理」）．すなわち，ふたつのそのようなパラメーターについてラミネーションが位相同型であれば，じつはこれらのパラメーターは一致する．

この結果は論文④において発表した．

（４）力学系の帰納的極限から解析的に性質の良い部分を取り出すことで，リーマン面によるラミネーションを構成できる．これがLyubich-Minsky ラミネーションを構成する際の土台となる位相空間である．位相空間の解析的な扱いやすさの指標として「局所コンパクト性」が挙げられるが，もし上述のラミネーションの中に双曲型リーマン面があると，局所コンパクト性が失われることが知られている．この双曲型リーマン面の有無を決定する問題がラミネーションの「型問題」である．

多くの「性質のよい」力学系のラミネーションは双曲型リーマン面をもたないが，2 次関数に「無理的中立固定点」（無理的回転に対応する固有値をもつ固定点）があるとき，ラミネーションには双曲的リーマン面があるか，という問題は未解決であった．

本研究では，C.Cabrera との共同研究により，無理的中立固定点が「有界型」とよばれる典型的なクラスに属するものであれば，双曲的リーマン面が存在しないことを示した．証明の手法はJulia集合の幾何学的性質に依存したもので，同様の手法は「Feigenbaum型」と呼ばれる無限回くりこみ可能な２次関数にも応用できる．

この結果は論文①において発表し，現在雑誌の電子版には掲載済みである．また，この結果のさらなる拡張について，現在もCabrera との共同研究を継続している．

（５）Y.-C. Chenとの共同研究により，Julia集合の正則運動が退化する様子を微分方程式を用いて記述する研究を行った．

2 次多項式の力学系が構造安定な場合，その変化は正則運動とよばれる擬等角変形の族によって与えられる．いわゆる Cantor 型とよばれる力学系はこの種の安定な力学系族を与えるが，この族が退化して別のMisiurewicz 型とよばれる不安定な力学系に連続的に変化するとき，「正則運動の退化」という視点からは十分な研究がなされていない状態である．

本研究では，まずコンピューターによるシミュレーションによって，力学系が退化する様子を数値的に解析し，動画として視覚化した（論文②）．その際，Mandelbrot 集合の外射線を数値計算する際の計算誤差に関する評価式を与えた．

さらに現在では，正則運動が退化する際の速度評価について研究を行っている．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 6 件）


① C. Cabrera and T. Kawahira. On the natural extensions of dynamics with a Siegel or Cremer point, J. Diff. Equ. Appl. 2012.
DOI:10.1080/10236198.2012.681780 査読あり

② Y.-C. Chen, T.Kawahira, H-L Li, and J-M Yuan Family of invariant Cantor sets as orbits of differential equations, II: Julia sets. *Inter. J. Bifur. & Chaos.* 21 (2011) pp. 77-99. 査読あり

③ T. Kawahira. Some new applications of Zalcman's lemma to complex dynamics. (In Japanese). *RIMS Kokyuroku,* 1699(2010), pp. 44 – 61. 査読なし

④ C. Cabrera and T. Kawahira. Topology of the regular part for infinitely renormalizable quadratic polynomials. *Fund. Math.* 208 (2009) pp 35-56. 査読あり

⑤ T.Kawahira. Tessellation and Lyubich-Minsky laminations associated with quadratic maps II: Topological structures of 3-laminations. *Conformal Geom. Dyn.* 13 (2009) pp 6-75. 査読あり

⑥ T.Kawahira. Tessellation and Lyubich-Minsky laminations associated with quadratic maps I: Pinching semiconjugacies. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 29(2009) no 2. pp 579-612. 査読あり

〔学会発表〕（計７件）

① T.Kawahira. Denseness of repelling cycles in the Julia set and its parameter analogue. Complex and P-adic Dynamics Tutorial Week, 2012 年２月９日, ICERM, Brown University, USA
② 川平友規. Zalcmanの補題が生成する複素力学系のリーマン面ラミネーション. 研究集会「複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺」, 2011 年 12 月 9 日. 龍谷大学セミナーハウスともいき荘,
③ 川平友規. 複素力学系から生成されるリーマン面ラミネーション. 2011 年度複素力学系研究集会 -- 複素力学系の総合的研究 --, 2012 年１月 26 日, 京都大学　数理解析研究所 420 号室,
④ 川平友規. Some new applications of Zalcman's lemma to complex dynamics. RIMS研究集会「複素力学系とその関連分野の総合的研究」(2009 年 12 月 15 日), 京都大学.
⑤ 川平友規. Zalcmanの補題：複素力学系への３つの応用. 第 52 回函数論シンポジウム, 2009 年 11 月 21 日, 大阪府立大学.
⑥ 川平友規. Topology of the Lyubich-Minsky lamination: Deformation and rigidity. 「Journe'es de Dynamique Complexe」2008 年 12 月 10－12 日, Universite' de Paris VI.
⑦ 川平友規. 複素力学系理論からみたゼータ関数. 共同研究企画「L 関数の値分布と関係する数論的な諸関数の研究」, 2008 年７月３日, 京都大学.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kawahira
プレプリント：

T. Kawahira. Quatre applications du lemme de Zalcman `a la dynamique complexe, *Submitted,* 2010.

６．研究組織
(1)研究代表者
川平 友規（KAWAHIRA TOMOKI）
**名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授**
研究者番号：50377975

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：