様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２３年 ６月 １日現在

機関番号：１４３０３
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2008 ～ 2010
課題番号：20740093

研究課題名（和文） ランダムδ磁場を持つシュレディンガー作用素の解析

研究課題名（英文） Analysis of Schrödinger operators with random δ magnetic fields

研究代表者
峯　拓矢（MINE TAKUYA）
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・准教授
研究者番号：90378597

研究成果の概要（和文）：アンダーソン型、ポアソン型のランダムδ磁場を持つシュレディンガー作用素のスペクトル集合の存在範囲、およびランダウ準位の多重度に対する評価を与えた。アンダーソン型などのランダムδ磁場についてのリフシッツテイルを示した。ポアンカレ平面上のシュレディンガー作用素について、δ磁場が有限個ある場合のランダウ準位間の固有値数の評価、およびδ磁場が格子上に存在する場合のランダウ準位の多重度に対する評価を与えた。

研究成果の概要（英文）：We give the range of the spectrum of the Schrödinger operators with random delta magnetic fields of the Anderson type, or of the Poisson type, and estimate the degeneracy of the Landau levels. We prove the Lifshitz tail for the Anderson case. We also study the Schrödinger operators with delta magnetic fields on the Poincaré upper half plane, and estimate the number of eigenvalues in Landau gaps for finite delta fields, and the degeneracy of the Landau levels for the lattice case.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００８年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２００９年度	900,000	270,000	1,170,000
２０１０年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：作用素論
科研費の分科・細目：数学 ・ 大域解析学
キーワード：解析学、関数解析学、関数方程式論、数理物理

１．研究開始当初の背景

δ 型磁場を持つシュレディンガー作用素は 1959 年に Aharonov と Bohm により考察され、アハラノフ・ボーム型磁場とも呼ばれている。「ゲージ場の実在」を示す彼らの結果はアハラノフ・ボーム効果とも呼ばれ、発表以来多くの数学者・物理学者による議論の対象となってきた。この系は、δ 磁場が一つだけの場合には極座標を用いて一般固有関数・散乱振幅を具体的に書き下せるが、δ 磁場が複数の場合には具体的な計算は困難となる。また、δ 磁場に定数磁場を付け加えた系も 2000 年に南部、2002 年に Exner-Šťovíček-Vytřas に研究され、研究代表者自身も 2005 年および 2006 年（野村との共同研究）に結果を得ていた。

一方、ランダム・ポテンシャルは、結晶構造に欠陥がある物質・不純物を含む物質や、結晶構造を持たない物質（アモルファス）のモデルとされており、特有の現象としてリフシッツ・テイルやアンダーソン局在が知られている。これは物質の電気的絶縁性と深く関

わっている。磁場がランダムの場合にもいくつかの結果が知られていたが、比較的限定的な状況における結果に限られており、十分に研究されているとは言い難い状況であった。

２．研究の目的

平面上にδ 型磁場（磁束が平面上の離散点集合にのみ集中するような磁場）が存在する系、特にδ 型磁場の位置がランダムな場合における、対応するシュレディンガー作用素のスペクトル，およびその状態密度についての研究を行う。特に、以下の課題についての研究を重点的に行う。

（１）ランダムδ 磁場に定数磁場を加えたシュレディンガー作用素のスペクトルの構造を調べる。

（２）同作用素のランダウ準位の多重度について調べる。

（３）同作用素に対するリフシッツ・テイルを証明する。

（４）同作用素に対するアンダーソン局在を証明する。

（５）ポアンカレ円板上のδ 磁場に対応するシュレディンガー作用素について研究を行う。

３．研究の方法

（１）スペクトルについては、Kirsch-Martinelli による Admissible potential の方法(特定の型のポテンシャルを持つ作用素のみによって、ランダム作用素のスペクトルを決定する方法）を適用する。

（２）ランダウ準位の多重度を調べるには、固有関数の具体形を用いて、それが二乗可積分かどうかを判定する。まず、固有関数を Weierstrass 型の多価無限乗積で表し、その遠方での増大度の評価を、Levin の整関数論（の多価関数への拡張）を用いて行う。

（３）リフシッツ・テイルは、定数磁場がない場合(δ 磁場のみの場合）について考える。状態密度の上からの評価については、δ 磁場に対する Hardy 型不等式用いて行う。

（４）ランダム磁場中のアンダーソン局在の理論における困難の原因である「磁場パラメータに対する固有値の非単調性」を解決するには、定数磁場にδ 磁場を一つだけ付け加えた場合にギャップ間の固有値がδ 磁場の強さに対して単調に動く事実が有効となり得る。δ 磁場同士が十分離れているとき、同様の議論がランダムδ 磁場系に適用し得るかを吟味する。

（５）ポアンカレ円板上の定数磁場の場合にもユークリッド平面の場合と類似した昇降作用素が存在し、その代数的交換関係はδ磁場が存在する場合にもほぼ成り立つ。δ磁場の影響は交換関係に現れる作用素の境界条件の差異となって現れるが、それを解析することによりランダウ準位のギャップ中の固有値数は評価できる。さらに、ランダウ準位の固有関数もユークリッド平面の場合と同じくある種の周期性を持つ正則関数で表され、その遠方での漸近挙動を評価することによりランダウ準位の多重度を調べる。

４．研究成果

（１）ユークリッド平面上でのランダムδ磁場を持つシュレディンガー作用素のスペクトルについて。まず、ポアソン型のランダム性を持つ場合には、かなり一般的な仮定の下でスペクトルが磁場の強さ以上の値のなす半直線を埋め尽くすことが示された。これは安藤・岩塚・神永・中野によるポアソン型ランダム・スカラー・ポテンシャルの結果から類推されるごく自然な結果である。アンダーソン型についても、周期的な場合の拡張としてごく自然な結果が得られた。特に、δ磁場の値の範囲が(0,1)開区間より真に狭い閉区間に納まる場合、十分に格子間距離が広ければ下の方のランダウ準位が孤立した無限多重度の固有値となることを示した結果は、δ型磁場特有の現象として注目すべきものである。

（２）ランダウ準位の多重度については、周期的な場合の結果の自然な拡張が得られた。ただ、磁場の値が臨界的な場合には解の挙動を精密に得ることが難しく、多重度の値を得ることが出来なかった。この点については改良の余地があると言える。

（３）リフシッツ・テイルについても、定数磁場が無い場合にはかなり一般的な仮定の下に証明を得た。しかし、Hardy 型不等式は若干評価が甘く、定数を含めて最適な不等式を得るにはさらなる研究が必要と思われる。

（４）アンダーソン局在については、直接の進展はなかった。ただ、James Borg によるδ型磁場に対する状態密度の経路積分表示（経路のδ磁場の周りでの回転数を用いて状態密度のラプラス変換を表す）には注目すべき点があり、今後その点について詳しく解析を行っていきたい。

（５）ポアンカレ円板上の作用素のスペクトルについては現在までにかなりの進展があった。まず、δ磁場が有限個の場合のランダウ準位のギャップ中の固有値数の評価が得られ、δ磁場が格子（離散群の作用で不変な離散集合）上にある場合のランダウ準位の多重度についても、ユークリッド平面の場合の自然な拡張を得ることが出来た。現在のところ、格子にはある種の数論的制限を課しているが、これは技術的な制限と思われるため、この点について今後より詳しく研究を行う予定である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計７件）

①Takuya Mine;
Self-adjoint extensions of Schrödinger operators with δ -magnetic fields on Riemannian manifolds, Acta Polytechnica Vol. 50, No. 5, 査読有, 2010, 62--72.

②Takuya Mine and Yuji Nomura;
The spectrum of Schrödinger operators with periodic Aharonov-Bohm magnetic fields, RIMS kokyuroku Bessatsu B16, 査読有, 2010, 135--140.

③岩塚 明, 峯 拓矢, 島田 伸一;
Spectral properties of Schrödinger operators with singular magnetic fields supported by a circle in R^3,
数理解析研究所講究録 1696
スペクトル・散乱理論とその周辺,
査読無, 2010, 79--93.

④ Akira Iwatsuka, Takuya Mine, and Shin-ichi Shimada;
Norm resolvent convergence to Schrödinger operators with infinitesimally thin toroidal magnetic fields, Spectral and Scattering Theory for Quantum Magnetic Systems, P. Briet, F. Germinet and G. Raikov (Ed.), Contemporary Mathematics 500, AMS, 査読有, 2009, 139-151.

⑤Takuya Mine and Yuji Nomura;
The spectrum of Schrödinger operators with random δ magnetic fields, Annales de l'Institut Fourier 59, No. 2, 査読有, 2009, 659--689.

⑥Takuya Mine and Yuji Nomura;
Schrödinger Operators with Random δ Magnetic Fields, MATHEMATICAL RESULTS IN QUANTUM MECHANICS, Proceedings of the QMath10 Conference (edited by Ingrid Beltita, Gheorghe Nenciu and Radu Purice), World Scientific, 査読有, 2008, 203--217.

⑦野村 祐司, 峯 拓矢;
Schrödinger operators with random δ magnetic fields, 数理解析研究所講究録 1607 スペクトル・散乱理論とその周辺, 査読無, 2008, 1--8.

〔学会発表〕（計１０件）

①Takuya Mine (Yuji Nomura との共同研究), The spectrum of the Aharonov-Bohm Hamiltonian on the hyperbolic plane, Spectral and Scattering Theory and Related Topics, 2011 年 2 月 17 日, 京都大学数理解析研究所（京都市左京区).

②Takuya Mine, Self-adjoint extensions of the Aharonov-Bohm Hamiltonian on Riemannian manifolds, Qmath 11 Mathematical Results in Quantum Physics, 2010 年 9 月 8 日, University of Hradec Kralove (Hradec Kralove, Czech Republic).

③峯 拓矢（野村祐司との共同研究）, 双曲平面における Aharonov-Casher 型定理について, 準古典解析における諸問題, 2010 年 7 月 6 日, 京都大学数理解析研究所(京都市左京区).

④Takuya Mine (Yuji Nomura との共同研究), Lifshitz Tail for Schrödinger Operators with Random δ Magnetic Fields, Arizona School of Analysis with Applications, 2010 年 3 月 16 日, University of Arizona (Tucson, United States).

⑤ Takuya Mine, Spectrum of the Aharonov-Bohm Hamiltonian with constant magnetic fields in the hyperbolic plane, CSASC 2010, 2010 年 1 月 22 日, Charles University (Prague, Czech republic).

⑥Takuya Mine, Aharonov-Bohm Solenoids in a homogeneous magnetic field (ポスター発表), Aharonov-Bohm Effect and Berry Phase Anniversary 50/25, 2009 年 12 月 15 日), University of Bristol(Bristol, England).

⑦Takuya Mine (Yuji Nomura との共同研究), Aharonov-Bohm Solenoids on the Hyperbolic Plane, XVI International Congress on Mathematical Physics, 2009 年 8 月 1 日, Clarion Congress Hotel Prague (Prague, Czech Republic).

⑧Takuya Mine (Akira Iwatsuka, Shin-ichi Shimada との共同研究), Norm resolvent convergence to Schrödinger operators with infinitesimally thin toroidal magnetic fields, Analytic and algebraic methods in physics V, 2009 年 5 月 27 日,
Villa Lanna (Prague, Czech Republic).

⑨ Takuya Mine (Yuji Nomura との共同研究), ランダムδ磁場におけるリフシッツ・テイルについて, 2008 年度日本数学会秋季総合

分科会, 2008年9月26日,
東京工業大学(東京都目黒区).

⑩Takuya Mine (Akira Iwatsuka, Shin-ichi Shimada との共同研究), Norm resolvent convergence to Schrödinger operators with infinitesimally thin toroidal magnetic fields, Spectral and Scattering Theory for Quantum Magnetic Systems, 2008年7月8日, Centre International de Rencontres Math'ematiques (Luminy, France).

６．研究組織

(1)研究代表者

峯　拓矢 (MINE　TAKUYA)
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・
准教授
研究者番号：90378597

(2)研究分担者

(　　)

研究者番号：

(3)連携研究者

(　　)

研究者番号：

(4)研究協力者

野村 祐司 (NOMURA YUJI)
愛媛大学・大学院理工学研究科・
准教授
研究者番号：40282818