

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月25日現在

機関番号：32619

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2008～2011

課題番号：20740094

研究課題名（和文）退化特異性をもつ偏微分方程式の自由境界問題とその応用

研究課題名（英文）Free boundary problems of PDEs with degeneracy-singularity and their applications

研究代表者

竹内 慎吾（TAKEUCHI SHINGO）

芝浦工業大学・システム理工学部・准教授

研究者番号：00333021

研究成果の概要（和文）：生物の個体数の変化に関連するある種の微分方程式に関して、その特異な数学的構造を発見し、非線形性の数理解析を行うことでこれを解明した。特にヤコビ楕円関数といわれる特殊関数を一般化した新しい関数を定義し、これを用いて微分方程式の厳密解を表示し、解構造を完全に記述することに成功した。この一般化関数についての代数的な性質を調べて、解析的手法では発見できなかった知見を得られるのではないかと期待している。

研究成果の概要（英文）：For a class of differential equations concerning change of the number of individuals, I discovered a singular mathematical construction and solved it by mathematically analyzing the nonlinearity. In particular, I defined a novel function which is a generalization of so-called Jacobian elliptic function and succeeded in describing the construction of the set of all solutions by representing all exact solutions in the form of the new function. In the future, I expect that studying the algebraic properties of the generalized Jacobian elliptic function, we can obtain new knowledge about differential equations, which could not be discovered in analytic approach.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：非線形現象・解析学・微分方程式・自由境界・退化性・特異性・p-Laplacian

1. 研究開始当初の背景

しかるべき条件下において、退化特異性をもつ放物型偏微分方程式の初期値境界値問題の適切性や、これらの方程式の解の定常状態を記述する楕円型偏微分方程式の解の存在や正則性については、De Giorgi, Moser を

はじめとする多くの研究者によって古くから研究されている。しかしながらその相互関係、すなわち放物型方程式の解が爆発せずに、対応する楕円型方程式の解集合へ収束する場合については、現在に至るまでほとんど研究されていない。したがって楕円型方程式の解の定常解としての安定性は、特別な場合を

除いて未解決である。理由として主に次の二つがあげられる。

(1) 退化特異性をもつ方程式では一般に線形化安定性原理（線形化作用素の固有値の分布で安定性が決定される）が有効ではないこと。

これは（形式的）線形化作用素もまた退化特異性を有することに起因する。

(2) 拡散項の退化性、または反応項の特異性が原因で、楕円型方程式の解集合が連続体を含むこと。このとき、対応するリアプノフ汎関数の極小点は必ずしも狭義極小とはいえず、個々の定常解の安定性を導くことが困難となる。

これらの理由により、放物型方程式の解の漸近挙動、特に楕円型方程式の解の近傍に初期関数をとった場合の漸近挙動（定常解の安定性）は、定常解集合が離散的である場合を除き、国内外問わずほとんど手をつけられていないのが現状である。

2. 研究の目的

本研究は、退化特異性をもつ放物型偏微分方程式が生成する力学系の構造を解明することを全体構想として、その定常状態を記述する楕円型偏微分方程式の解集合の構造、特に個々の解の自由境界が形成される仕組みを数学的に解明し、その応用として放物型方程式の解の漸近挙動を調べる方法を開発することを目的とする。

3. 研究の方法

(1) 解が形成する自由境界の形状を調べるため、ある種の微分不等式を満たし、かつ特異な形状をもつような関数を構成し、解とそれとに比較定理を用いることで、解も同様の形状をもつことを示した。そのような関数の構成に、Antontsev-Diaz-Shmarevによる局所エネルギー法を応用したところが特徴的である。

(2) ヤコビの sn 楕円関数が Allen-Cahn 方程式といわれる双安定常微分方程式を満たすことはよく知られている。このアナロジーで、ヤコビの sn 楕円関数を一般化した関数を定義することにより、 p -Laplacian を主要部にもつ双安定常微分方程式の厳密解を 1 パラメータで表示した。

4. 研究成果

(1) p -Laplacian を拡散項とする定常拡散口

ジスティック方程式について「解がある領域上で環境収容力と一致するためには、環境収容力が p 調和であることが必要十分である」という予想を立て、以下の結論を得た。

① まずこれを 1 次元のときに肯定的に証明した。環境収容力が一定の場合にこのような領域が存在することは、Guedda-Veron (1988) による先行結果で知られている。彼らの扱ったケースでは方程式が自励系であるため相空間法で解の性質を把握できるが、我々のケースでは方程式が非自励系であるため、相空間法は直接には適用できない。我々は n 次元の場合も念頭に置いた解析をするため、変分法による解決を目指し、これを実現した。本定理は彼らの結果を包括する成果である。 p -Laplacian に関して、非定数関数との一致集合が研究された例は、障害物問題ではなく境界値問題では本研究が最初である。

② さらにこの結果を n 次元の場合にも肯定的に解決することができた。環境収容力が一定の場合にこのような領域が存在することは、Kamin-Veron (1993) による先行結果で知られている。解が形成する自由境界の形状を調べるため、ある種の微分不等式を満たしかつ特異な形状をもつような関数を構成し、解とそれとに比較定理を用いることで、解も同様の形状をもつことを示した。そのような関数の構成に、Antontsev-Diaz-Shmarev による局所エネルギー法を応用したところが特徴的である。

(2) 1 次元の p -Laplacian を含むある種の双安定常微分方程式の厳密解を、ヤコビの sn 楕円関数を一般化した新しい関数を導入することで、統一的に表現できた。この一般化関数は Elbert (1979), Drabek-Manasevich (1999) による一般化三角関数を補間する関数となっている。その代数的な構造、特にその周期と（重み付き）算術幾何平均との関わりなどについて、整数論の研究者とコンタクトを取り合ったが、その限りでは明らかなことではないようである。今後はこの関数の性質や他の微分方程式への応用を考えたい。またこの解の表現により、 p -Laplacian の（正規化した）固有関数が $2p$ -Laplacian の双安定方程式の解でもあることを発見した。固有値問題と双安定方程式の境界値問題との間に、線形化ではなく直接の対応を与えている点で、この結果は面白いと思う。今後はこの対応に潜む構造を探ってみたい。

(3) 研究期間中に 2 つの特別講演の依頼を受

け、これを行った。ひとつは 2009 年に開催された日本数学会函数方程式論分科会において「 p -Laplacian の自由境界問題」という題目で、前述の一致集合に関する講演を行った。もうひとつは 2010 年に開催された第 32 回発展方程式若手セミナーにおいて「双安定反応拡散方程式の力学系」という題目で、拡散ロジスティック方程式が生成する力学系を題材として無限次元力学系に関する入門的講演を行った。そこでは拡散項が半線形としたが、退化特異性をもつ準線形の拡散項をもつ方程式を考えると、対応する力学系の時間無限大の挙動については、大域的アトラクターの存在や次元の結果を除いてほとんどわかっていない。その解明に本研究課題の成果を活かしたいと考えている。

(4) 研究期間中に京都大学数理解析研究所において共同研究「非線形拡散の数理」なる研究会を行った(研究代表者:竹内慎吾,副代表者:赤木剛朗(神戸大),石渡哲哉(芝浦工大),2012年2月13日~2月15日)。我が国では古くから線形拡散の研究が盛んだが、非線形拡散に関してはその多くが線形拡散の拡張としての性質を調べるにとどまり、非線形拡散特有の性質についてはあまり研究されていなかったようである。近年、非線形拡散に関する個性的な研究が散見されるようになったことから、このたびの非線形拡散に特化した研究会を企画した。幸い、多くの出席者に参加を賜り、非線形拡散に関する関心の高さを認識した次第である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

- ① Shingo Takeuchi, Generalized Jacobian elliptic functions and their application to bifurcation problems associated with p -Laplacian, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 385, 24-35, 2012, 査読有
- ② Shingo Takeuchi, Coincidence sets in quasilinear elliptic problems of monotone type, *Journal of Differential Equations*, 251, 2196-2208, 2011, 査読有
- ③ 竹内慎吾, 双安定反応拡散方程式の力学系(特別講演), 第32回発展方程式若手セミナー報告集, 32, 1-15, 2010, 査読無
- ④ 竹内慎吾, Coincidence sets in quasilinear problems of logistic type, *京都大学数理解析研究所講究録*, 1640, 85-103, 2009, 査読無

- ⑤ Shingo Takeuchi, Coincidence set associated with second order ordinary differential equations of logistic type, *Differential and Integral Equations*, 22, 587-600, 2009, 査読有

[学会発表](計14件)

- ① 竹内慎吾, 一般化ヤコビ楕円関数とその応用, 第100回神楽坂解析セミナー, 2012/01/28, 東京理科大学
- ② Shingo Takeuchi, A generalized Jacobian elliptic functions and its application to p -Laplacian bifurcation problems, 2011 International Workshop on NLPDE and Applications, 2011/06/24, Pusan National University
- ③ 竹内慎吾, ヤコビの楕円関数の一般化と p -Laplacian の分岐問題への応用, 松山解析セミナー2011, 2011/02/04, 愛媛大学
- ④ 竹内慎吾, ヤコビの楕円関数の一般化と p -Laplacian の分岐問題への応用, 第10回盛岡応用数学小研究集会, 2010/11/07, 岩手大学
- ⑤ 竹内慎吾, Generalized elliptic functions and their application to a p -Laplacian bifurcation problem, 広島微分方程式研究会, 2010/10/09, 広島大学
- ⑥ 竹内慎吾, 準線形楕円型方程式の境界値問題に現れる一致集合, 日本数学会秋季総合分科会, 2010/09/24, 名古屋大学
- ⑦ 竹内慎吾, 双安定反応拡散方程式の力学系(特別講演), 第32回発展方程式若手セミナー, 2010/08/29, 伊豆長岡
- ⑧ 竹内慎吾, ヤコビの楕円関数の一般化と双安定準線形方程式への応用, 日本数学会年会, 2010/03/24, 慶應義塾大学
- ⑨ 竹内慎吾, ヤコビの楕円関数の一般化と非線形固有値問題への応用, 第4回非線形型偏微分方程式と変分問題, 2010/02/14, 首都大学東京
- ⑩ 竹内慎吾, p -Laplacian の自由境界問題(特別講演), 日本数学会秋季総合分科会, 2009/09/24, 大阪大学
- ⑪ 竹内慎吾, On the singular perturbation in a quasilinear Dirichlet problem, 第6回浜松偏微分方程式研究集会, 2008/12/23, 静岡大学
- ⑫ 竹内慎吾, Coincidence sets in quasilinear problems of logistic type, 非線形発展方程式と現象の数理, 2008/11/18, 京都大学数理解析研究所
- ⑬ Shingo Takeuchi, Coincidence sets in quasilinear problems of logistic type, Sendai Elliptic-Parabolic PDEs Conference, 2008/11/08, 東北大学
- ⑭ 竹内慎吾, 準線形常微分方程式に対する一致集合, 日本数学会秋季総合分科会,

2008/09/24, 東京工業大学

[その他]
ホームページ等
<http://www.sic.shibaura-it.ac.jp/~shingo/>

6. 研究組織

研究代表者
竹内 慎吾 (TAKEUCHI SHINGO)
芝浦工業大学・システム理工学部・准教授
研究者番号：00333021