様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　22 年 03 月 31 日現在

研究種目：若手研究(B)
研究期間：2008～2009
課題番号：20740098
研究課題名（和文）空間非斉次性をもつ双安定反応拡散方程式の遷移層解に関する研究

研究課題名（英文）On a study of a solution with a transition layer for a bistable reaction diffusion equation with a heterogeneous environment

研究代表者
松澤　寛（Hiroshi Matsuzawa）
沼津工業高等専門学校・教養科・講師
研究者番号：80413780

研究成果の概要（和文）：相転位現象などのモデル方程式として知られる Allen-Cahn 方程式(双安定反応拡散方程式)において，２つの異なる相の界面は，対応する方程式の解において空間内の狭い範囲で急激に値が変化する遷移層という形状で表現される．本研究では，単独の双安定反応拡散方程式を１次元の数直線上で考え，環境効果として非線形項に導入された空間非斉次性が空間内のある区間上で消えている場合，その区間における遷移層のダイナミクスを与える方程式を導出した．

研究成果の概要（英文）：In this research we study the dynamics of a single transition layer of a solution to a spatially inhomogeneous bistable reaction diffusion equation in one space dimension. The spatial inhomogeneity is given by a function of the space variable. In particular, we consider the case where this function is identically zero on an interval and study the dynamics of the transition layer on the interval. In this case the dynamics of the transition layer on the interval becomes so-called very slow dynamics. In order to analyze such a dynamics, we construct an attractive local invariant manifold giving the dynamics of the transition layer and we derive an equation describing the flow on the manifold. We also give applications of our results to two well known nonlinearities of bistable type.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	900,000	270,000	1,170,000
2009 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,400,000	420,000	1,820,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：偏微分方程式，反応拡散方程式，双安定，遷移層，不変多様体

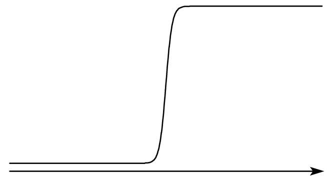
１．研究開始当初の背景

反応拡散方程式は生物の個体数密度分布，神経伝達，化学反応や相転移現象など，方程式が記述する数理モデルを通して，そこに現れるパターン形成の仕組みを解明したいという動機のもとで数多くの研究がなされている．時間発展問題において時間が十分経った状況での解の漸近挙動のみならず，それに

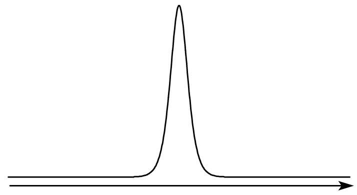
至る途中の過程で見られるさまざまなパターンの形成などを理解するためには，定常問題の定常解構造をより詳しく理解することが不可欠である.定常問題の解析にあたり，安定な定常解の存在やその個数を調べることが十分時間が経過した後の状態を調べるために重要であるのはもちろんであるが，不安定な定常解であっても，それが初期状態の微小な違いがその後の時空パターンに大きな違いを生み出す閾値的な役割を果たすことが知られており，ダイナミクスの途中の過程を知るのに重要な役割を担っている．反応拡散方程式において，拡散効果と環境や相互作用に起因する反応項とのからみで自発的に空間的に非一様な定常パターンが形成されるか？という問題の研究が活発になされてきた.しかし，Casten,Holland らや Matano の研究により，方程式が単独の場合，凸領域上における Neumann 境界条件で，非線形項が空間変数に依存しない場合，安定な定常解は定数関数しか存在しないことが示された．つまり，非線形項が空間変数に依存しない場合，空間的に非一様な定常パターンは現れないことを示した．これに対し，反応項が空間変数に依存するあるいは反応拡散方程式を考える領域が非凸領域になると，空間的に非一様な定常解が存在することも示され， 様々な方面で活発に研究されている．現在までは空間的に一様な環境下，つまり方程式の非線形項が空間変数に依存しない場合における自発的なパターンの形成のメカニズムが主に研究されていた．しかし，自然界は空間的に非一様な摂動を受けていることが普通であり，それにより定常パターンの存在や安定性，またダイナミクスがどのような影響を受けるかは，実際の現象を理解する上で解決されなければならない問題である．

一方で，定常パターンと並んでパターン形成問題において重要な解として一定の形状で伝播する進行波と呼ばれる解がある．通常の拡散方程式(熱方程式)では拡散の効果により，伝播する過程で形が崩れてしまう．したがって，進行波の存在は拡散項と反応項(非線形項)を併せ持った反応拡散方程式において両者のバランスから生まれるものであり，反応拡散方程式のパターン形成問題を考える上で重要な指標を与える．このような進行波解の研究を基礎として，空間内の狭い範囲に局在するパターン(局在パターン)のダイナミクスについて，定常パターンの研究だけからは得られなかった研究結果が得られてきた．

このようなパターン形成の問題を考えるとき，直接対象とする現象を表す方程式を考えるのはその複雑さから困難であることが多い．実際，パターン形成問題では非常に単純化なモデル方程式を用いてその仕組みを理解することがスタートとなる．本研究で用いた単独の双安定反応拡散方程式もその目的で数多くの研究がなされている．しかし，環境効果として方程式に空間非斉次性が入ったものについてはそれがない場合に比べて十分な研究がなされているとはいえない状況である.



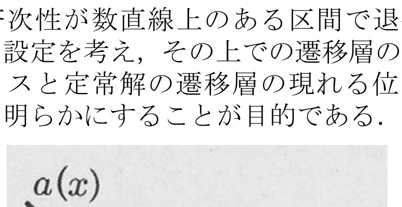
図：局在パターンの例１　遷移層



図：局在パターンの例２　スパイク

２．研究の目的

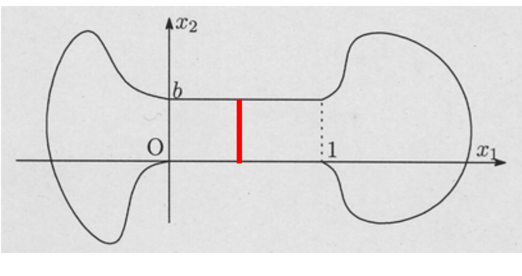
単独の双安定反応拡散方程式である Allen-Cahn 方程式は相転位現象や集団遺伝学のモデル方程式としてだけでなく，複雑なパターン形成のメカニズムを詳しく調べるための単純なモデル方程式として現在まで様々な研究がなされてきた．その中で，環境効果として方程式に空間非斉次性が含まれる問題は1987年のAngenent,Mallet-Palet, Peletier らの研究に始まり，Hale-Sakamoto, Nakashima, Dancer, Yan, Fife, Hisao らの研究によって遷移層をもつ定常解について，その遷移層の現れる位置と定常解の安定性の関係が空間非斉次性を表す関数の条件として書き下せるという結果が得られた．また，適当な初期条件に対する解の遷移層の形成とダイナミクスについての結果も得られた．しかし，これらはすべて空間非斉次性にすべてある種の非退化性を仮定しており，空間非斉次性が数直線上のある区間で退化して消えているという設定(以下の図を参照)においてはそれ以上，遷移層の位置に関する詳しい追跡はできないでいた．そこで本研究では空間非斉次性が数直線上のある区間で退化している設定を考え，その上での遷移層のダイナミクスと定常解の遷移層の現れる位置について明らかにすることが目的である．



図：数直線上のある区間Ｉで退化する空間非斉次性を表す関数の例

３．研究の方法

反応拡散方程式の解のダイナミクスは一般に関数空間を相空間とする無限次元力学系として解析すすることになるが，遷移層など空間内の狭い範囲に現れる形状(局在パターン)のダイナミクスの多くの場合無限次元空間内の有限次元多様体の上のダイナミクスに縮約されることが多い．このような多様体は不変多様体などと呼ばれる．局在パターンのダイナミクスを不変多様体を構成することにより解析した研究は 1989 年の Carr, Pego や Hale, Fusco らにより始められた．彼らは Allen-Cahn 方程式を 1 次元有界区間で考え，区間内に指定された個数の遷移層が一定の距離以上離れた状態で存在する場合，それらの相互作用による動きを与える方程式を厳密に導出した．この研究は 2002 年，栄伸一郎氏(九州大学)により一般的な反応拡散方程式系において，安定な単一局在パターンが存在するという条件の下で，数直線上に十分距離を離した複数の局在パターンが存在するとき，同様にそれらの相互作用について解析が行えることを不変多様体を構成することにより証明を与えた．この結果は弱い相互作用と呼ばれ，局在パターンのダイナミクスを解析する手法として広く応用されている．また，本研究に関連する研究として 1996 年から 1997 年にかけて Kowalczyk らにより扱われたダンベル型領域上の Allen-Cahn 方程式の界面の運動の解析に関する研究がある．そこではダンベルのハンドル部分に現れる界面の動きは指数的に遅く，そのダイナミクスや定常解の界面の位置は，ハンドル部分の端における領域の境界の曲率が影響を受けることが示された．具体的にはある関数空間において，ハンドル部分に界面をもつ近似解の族を考え，そのそばに不変多様体を構成することにより，不変多様体の近傍における解のダイナミクスが界面の運動を与えるという手法であった．



図：ダンベル型領域とハンドル部分の境界に直交する界面(赤線)

本研究で扱う問題において，空間非斉次性が退化する区間は Kowalczyk らの研究におけるダンベルのハンドル部分に対応させると，Kowalczyk らの研究が我々の問題設定と非常に類似していることに着目し，また，有界区間で問題を考えた場合，境界条件からの寄与が本質的でない困難さを生むことから，問題を数直線全体で考えることにしその困難を取り除いた．数直線全体で問題を考えた場合，栄氏の手法がこの研究が本研究においても有効であることがわかった．

４．研究成果

本研究では，単独の双安定反応拡散方程式を１次元の数直線上で考え，方程式に空間非斉次性を含み，その空間非斉次性が空間内のある区間上で消えている場合，その区間上における遷移層のダイナミクスについての研究を行った．このように空間非斉次性がある区間で退化している場合，その区間上での遷移層のダイナミクスは指数的に遅く，very slow と呼ばれ，理論的な解析がほとんどできない状態であった．本研究において「研究の方法」で述べた Kowalczyk らの研究との類似点を見出し，本研究における方程式の中の空間非斉次性を表す関数が退化している区間の両端における振る舞いが遷移層のダイナミクスに影響を及ぼすことを形式的な計算で示すことができた．次に，それを厳密に証明するために，不変多様体の理論に基づく証明を行った．今回の問題は境界条件からの寄与が,空間非斉次性からの寄与に比べ十分小さく本質的でないことから，数直線全体における問題へ切り替えた．今回の研究のように空間非斉次が一定の区間で退化している場合，それを空間非斉次性のない方程式からの摂動と捕らえることによって，先述の栄氏の手法を用いることが可能となり，考えるべき線形化固有値問題が飛躍的に容易となることが鍵となった．実際，その手法を適用することにより，空間非斉次性が退化した区間における遷移層のダイナミクスを与える方程を導出することに成功した．本研究成果は栄氏との共同研究として学術論文「The motion of a transition layer for a bistable reaction diffusion equation with heterogeneous environment」として，学術雑誌 Discrete and Continuous Dynamical Systems A に掲載されている．

本研究の手法は空間非斉次性に関して同様の設定を考えることにより反応拡散系(system)の場合へ応用できることがわかり，現在研究を進めている．特に同じ双安定系で，空間非斉次性がない方程式において安定な定常フロント解が存在し，空間無限遠における詳しい漸近挙動がわかる場合，同様な空間非斉次性を導入した場合，ほぼ同様の議論が出来ることがわかった．具体的な例として，２種競争系があげられ，双安定系となる場合，方程式に含まれるパラメータを適当な値にとると，安定な定常フロント解が存在することが示されている．しかし，本研究に適用す

るために必要な空間無限遠における十分詳しい漸近挙動についてはまだ分かっておらず，現在研究を続けている.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① Kazuhiro Kurata and Hiroshi Matsuzawa, Multiple stable patterns in a balanced bistable equation with heterogeneous environments, Applicable Analysis に掲載決定，査読有

② Shin-Ichiro Ei and Hiroshi Matsuzawa, The motion of a transition layer for a bistable reaction diffusion equation with heterogeneous environment, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 26(2010), 901-921, 査読有.

③ Hiroshi Matsuzawa, On a solution with transition layers for a bistable reaction-diffusion equation with spatially heterogeneous environments, Discrete and Continuous Dynamical Systems supplement 2009, 516 - 525, 査読有.

〔学会発表〕（計４件）

① Dynamics of a transition layer for a scalar bistable reaction-diffusion equation with spatially heterogeneous environments, Equadiff 12, Masaryk University, Brno, Czech Republic, 2009 年 07 月 23 日

② 空間非斉次性を含む双安定反応拡散方程式の遷移層をもつ解のダイナミクスについて,熊本大学応用解析セミナー，熊本大学, 2009 年 06 月 06 日

③ 双安定反応拡散方程式の遷移層をもつ解のダイナミクスについて, 日本数学会 2009 年度年会，東京大学駒場キャンパス，2009 年 03 月 28 日

④ On a solution with transition layers for a bistable reaction-diffusion equation with spatially heterogeneous environments, The 7th AIMS Conference on Dynamical Systems and Differential Equations, University of Texas at Arlington, Texas, USA, 2008 年 05 月 19 日

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）
○取得状況（計０件）

６．研究組織
(1)研究代表者
松澤　寛（Hiroshi Matsuzawa）
研究者番号：80413780

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし