

平成 22年 5 月 25 日現在

研究種目：若手スタートアップ

研究期間：2008 ～ 2009

課題番号：20840017

研究課題名（和文） 複素 3 次元 Q-ファノ多様体の重射影モデルによる研究

研究課題名（英文） On complex Q-Fano 3-folds with weighted projective space

研究代表者

鈴木 香織 (Kaori Suzuki)

横浜国立大学・経営学部・准教授

研究者番号：60508571

研究成果の概要（和文）：

3次元複素 Q-Fano 多様体に対し、その射影モデルを記述するというアプローチにより考察をおこなった。特に Fano 指数が 2 よりも大きい場合に、重み付き射影空間への埋め込みの余次元が 3 よりも大きい場合について研究を進め、特異点の情報を利用することで今まで得られていた分類の「候補達」の数を更に減らすことに成功した。また、ある種の反射影を用いて具体的な例の構成が可能だと予想されることもわかった。この構成にはまだ取り除くべき仮定が存在する。今後引き続き考察を進める予定である。

研究成果の概要（英文）：

In recent years, I was working on the classification of Q-Fano 3-folds from the view of their Fano indices $f > 1$ and graded rings. More concretely, I gave the list of whole “candidates” of Q-Fano 3-folds in the case of codim 4. Most of them can be realized using some kind of unprojections under some assumptions.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,170,000	351,000	1,521,000
2009年度	1,110,000	333,000	1,443,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,280,000	684,000	2,964,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：代数幾何学

キーワード：代数幾何、ファノ多様体、多様体の分類

1. 研究開始当初の背景

現在に至る 20 数年間における代数幾何学の中心的主題の一つに Mori Minimal Model Programme と代数多様体の分類がある。この分類の歴史の中で Q-Fano 多様体はその重要性を認識され、多くの研究者によって取り扱われるようになった。

非特異な 3 次元 Q-Fano 多様体の分類は 1980 年代までに Iskovskikh, Shokurov, Mori, Mukai らによって完全になされている。他方、Mori Minimal Model Programme においては Q-分解的な末端特異点を持つ多様体を扱うことが不可欠である。従って、このような特異点を持つ 3 次元 Q-Fano 多様体の分類が次の重要な問題となる。

Q-Fano 多様体の幾何学的な構造は、Fano 指数によって大きく異なる。特に、指数が 1 の場合に、20 年以上に渡りその分類に多くの努力が注がれてきた。しかし、完全には解決されておらず、現在も活発に研究が進められている。報告者は他の研究者によって解明されていなかった指数 2 以上の 3 次元 Q-Fano 多様体の分類について世界に先駆けて研究を続けてきた。

一般的な代数多様体の分類理論はロシアやイタリアの幾何学者らによって古くから研究が進められ、代表的な手段として連接層のコホモロジー理論や因子の交点理論が用いられてきた。しかし、Iskovskikh や Shafarevich による曲面の分類が Mori Minimal Model Programme により 3 次元の結果へと拡張されたことから、現在では、多様体の分類に取り組んでいる研究者達の多くはこの Mori Minimal Model Programme を用いる双有理幾何学的方法を採用している。

端射線収縮の理論を中心とする Mori Minimal Model Programme は強力な道具であるが、それだけでは解明しきれない側面も多い。例えば、3 次元 Q-Fano 多様体の重要な構成要素であるピカル数や、Q-Fano 多様体の射影モデル等の情報は Mori Minimal Model Programme の方法では得られない。そこで Q-Fano 多様体の分類理論を、その射影モデルを記述するというアプローチが重要になってきていた。

2. 研究の目的

本研究は 3 次元複素 Q-Fano 多様体を (1) 剛性と (2) 存在性及び (同型を除いた) 一意性についての観点から分類を進めることを目的とする。

ここで、Q-Fano 多様体とは、反標準因子が豊富で、Q-分解的な末端特異点のみをもつピカル数 1 の正規射影多様体のことであり、最近では滑らかな場合と同じように、単に Fano 多様体と呼ばれることもある。

Fano 指数が 1 で、かつ重み付き射影空間への埋め込みの余次元が 1 の場合には、肯定的結果が既に知られている。したがって、Fano 指数が 2 以上かつ、重み付き射影空間への埋め込みの余次元が 1 の時に、剛性を調べるのが次の段階になる。極僅かな例では剛性が得られており、特に Fano 指数が 2 の場合は、他の指数とは異なり K3 曲面の他に対数的 Del Pezzo 曲面に帰着可能であることから見通しが立てやすい。そこで、この場合を優先して研究を進める。

次に報告者の以前の研究により、取り得る全ての特異点の組たちの具体的な候補と付随するデータがある程度まで得られていた。従って、それらを特異点としてもつ Q-Fano 多様体の、存在性と一意性を明確にするというのが第二のテーマである。

これら二つのテーマについて研究を進めることで Q-Fano 多様体の分類が行われる。

二つのテーマは個々の例に対する手計算で進められるが、これらの結果をまとめる体系的な理論を構築し、コンピュータープログラムの作成を行う。結果は広く公開される。

3. 研究の方法

報告者は Q-Fano 多様体の分類理論を、その射影モデルを記述するというアプローチにより研究し問題の解決に取り組んでいる。

この方法の利点の一つに、次数環すなわち重み付き射影空間内での重射影モデルが式で書ける、という具体性がある。その結果、理論的には決定し得なかった幾つかの不変量に対してより良い評価、知見が得られるという点が挙げられる。これは次数付き環の可換環論と代数多様体の分類理論の密接な関

連から推察され得る代数幾何学的なアプローチでの解決の有効性を示すものと考えている。

研究は膨大な計算の上に構築されているが、理論構成に必要な様々なデータ、例を簡明な方法で分かりやすく得られる。

Q-分解的な末端特異点のみをもつという仮定は、Mori Minimal Model Programme を適用するのに必要不可欠なものである。一方でより悪い性質を持つ特異点を持つ (out of Mori category) 代数多様体も数多く存在する。

報告者の方法は、より一般の特異な3次元多様体の分類にも適用可能な部分があり、その研究の過程で得られた諸概念は、今後とも多様体の構造及び分類の研究の指針になると考えられる。

また、3次元Q-Fano多様体の分類に2次元多様体であるK3曲面の分類結果が用いられたことから、未だ分類方法が不明な4次元Q-Fano多様体の場合にも3次元での結果が応用可能であると容易に推測される。4次元多様体の分類結果はモジュライのコンパクト化などの数論幾何学の普遍的テーマの解明を始め、主にパンルヴェ微分方程式を中心とした解析学、ミラー対称性を含む物理学など多彩な分野への応用が期待されており、報告者の研究はその端緒となる興味深いものである。

3. 研究成果

3次元複素Q-Fano多様体に対し、その射影モデルを記述するというアプローチにより考察をおこなった。

特にFano指数が2よりも大きい場合に、重み付き射影空間への埋め込みの余次元が3よりも大きい場合について研究を進めた。この結果、特異点の情報を利用することで今まで得られていた分類の「候補達」の数を更に減らすことに成功した。また、ある種の反射影を用いて具体的な例の構成が可能だと予想されることもわかった。この構成にはまだ取り除くべき仮定が存在する。今後引き続き考察を進める予定である。

共著論文作成者のBrown氏の所属大学変更に伴い、これまでKent大学Web上に存在した3次元複素Q-Fano多様体のデータベースの再構築がおこなわれた。その際、以前存在した幾つかのミス指摘の上修正した。

この他関連する研究集会主催およびセミナー・学会発表は以下の通りである。

2008年8月には東京大学玉原セミナーハウスにおいて「閾値とジェットの手法」をテーマに代数幾何学サマースクールを共催した。ここでは、鹿児島大学の安田健彦・九州大学の高木俊輔の両氏を招いた集中講義などを行った。講演終了後は活発な議論が行われた。

さらに前年度に引き続き2009年8月、「ミラー対称性・グロモフウィッテン不変量とトポカル幾何」をテーマにした研究発表のほか、論文講読を含めた勉強会をし、多数の参加者を得た。

2009年8月には韓国ソウル市の西江大学に滞在中であったウォーリック大学のReid氏と議論する機会を得た。また西江大学代数幾何セミナーでこれまでに得られた研究成果を発表した。

2010年2月に北海道大学で開催された第6回数学相互若手研究集会に参加し、ポスター発表をおこなった。発表時にはFano指数が2よりも大きい場合に、重み付き射影空間への埋め込みの余次元が4である3次元複素Q-Fano多様体の最大の候補のリストが提示されている。北海道大学考究録に「Fano 3-folds with higher index」という題名でテクニカルレポートも掲載された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 1件)

① 鈴木香織、
Fano 3-folds with higher index and graded rings、北海道大学数学講究録、査読なし、142巻、2010年、pp180-184

〔学会発表〕(計 1件)

① 鈴木香織、
「Fano 3-folds with higher index and graded rings」

第六回数学総合若手研究集会—学際的交流への誘い—、2010年2月16日、北海道大学

[その他]
ホームページ等

「Graded ring database, Fano 3-fold」
<http://grdb.lboro.ac.uk/forms/fano3>
(更新継続中)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

鈴木 香織 (Kaori Suzuki)
横浜国立大学・経営学部・准教授
研究者番号：60508571

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし