様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　５月１９日現在

研究種目：若手研究（ｽﾀｰﾄｱｯﾌﾟ）
研究期間：2008～2009
課題番号：20840018
研究課題名（和文）　等質有界領域の性質の良い有界領域実現に関する研究とケーラー多様体への応用
研究課題名（英文）　Research of nice bounded realizations of homogeneous bounded domains and their applications to Kaehler manifolds

研究代表者
甲斐　千舟（KAI CHIFUNE）
金沢大学・数物科学系・助教
研究者番号：70506815

研究成果の概要（和文）：上半平面の一般化である等質ジーゲル領域は、ケイリー変換によってある有界領域に双正則に写される。このケイリー変換の像が、ベルグマンによって導入された代表領域と一致することを証明した。またジーゲル領域の定義に現れる錐について、錐の各点で過去・未来の方向を指定する因果構造の研究を行った。その結果、対称錐の一種であるローレンツ錐に対して、その因果構造を保つ自己同型が線型であるという定理の、初等的な証明を得た。

研究成果の概要（英文）：A homogeneous Siegel domain, which is a generalization of the upper half plane, is mapped biholomorphically to a bounded domain by the Cayley transform. We showed that the image of the Cayley transform coincides with the representative domain introduced by S. Bergman. We studied also the causal structures of regular open convex cones and obtained an elementary proof of the theorem that every causal automorphism of the Lorentz cone is a restriction of a linear map on the ambient vector space.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	1,320,000	396,000	1,716,000
2009 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
年度			
総　計	2,520,000	756,000	3,276,000

研究分野：複素解析学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：等質有界領域、ケイリー変換、代表領域、等質錐、因果構造

１．研究開始当初の背景

複素ユークリッド空間の中の有界領域は、その上の正則な自己同型写像の全体から成るリー群が推移的に作用しているとき、「等質有界領域」と呼ばれる。特別な等質有界領域として、「対称有界領域」があり、半単純リー群の表現論などをはじめとして、様々な

分野で研究されている。等質有界領域の研究は、表現論の方向では可解リー群の研究と関係しており、また複素解析・幾何の方向では、性質の良い有界領域の具体例として、研究が行われている。
等質有界領域は重要な研究対象でありながら、対称有界領域に比べると、まだ十分に理解が成されているとは言えない状況である。その原因の一つに、対称有界領域の場合には豊富な対称性の反映として、比較的扱いやすい代数構造が備わっているのに対し、等質有界領域の場合にはそのような構造が、いくぶん扱いにくいものとなってしまうことがあると思われる。
そのような中で２０００年代前半に、等質有界領域の研究者として知られる野村隆昭氏（九州大学）が、等質有界領域の上の解析や幾何に関する興味深い定理を発表した。ポアソン核や ベレツィン変換を用いた、等質有界領域の中での対称有界領域の特徴付けに関する定理などである。それらの定理でポイントとなるのは、ケイリー変換と呼ばれる幾何学的な双正則変換であった。
もう少し詳しく説明したい。特別な等質有界領域である対称有界領域は、複素の単位円板の一般化にあたるものであり、ハリッシュ・チャンドラ実現と呼ばれる、あるノルムに関する単位球として実現される。これは有界な実現である。一方で、単位円板がケイリー変換によって上半平面にうつるように、対称有界領域は「ジーゲル領域」と呼ばれる上半平面型の非有界な領域として実現することもできる。対称とは限らない等質有界領域の場合にも、「ジーゲル領域」として実現することはできるのだが、有界な実現に関しては、ハリッシュ・チャンドラ実現にあたる代表的な実現が存在するのかどうか、不明であった。
野村氏は調和解析の研究の中で、R. Penney 氏（米・Purdue 大学）と独立に、ケイリー変換を等質有界領域に一般化した。より正確に言えば、与えられた等質有界領域と正則同相な等質ジーゲル領域を、ある有界領域にうつす双正則な変換を定義したのである。
研究代表者は、このケイリー変換に興味をもち、ケイリー変換の重要性を改めて示唆する次のような結果を、以前の研究によって得た：「等質有界領域（あるいは等質ジーゲル領域）が対称であるための必要十分条件は、そのケイリー変換の像が凸なことである」。
「対称性」という高級な性質と、「凸性」という簡単な性質が、ケイリー変換を通じて結びつくというのは、興味深いことと思われた。一方で、ケイリー変換とは一体どのようなものであるか、その像はどのような有界領域であるか、といったことはまだよくわからない状況であった。研究代表者は、このような点を少しでも解明したいと考え、本研究を開始した。

２．研究の目的

等質ジーゲル領域をある有界領域にうつす、ケイリー変換と呼ばれる双正則写像の性質を解明することが、本研究の主な目的である。
まず、ケイリー変換の定義は明示的なものであり具体的な計算には適しているが、その変換のもつ性質を探るには、いくぶん複雑な定義である。そこで、より簡潔な、変換の性質のわかりやすい形でケイリー変換を再定義することが望ましいと考える。
次に、ケイリー変換の像である有界領域がもつ著しい性質を明らかにする、ということが第二の目的である。最も望ましいのは、与えられた等質有界領域の有界な実現の中で、ケイリー変換の像を特徴付けることである。
また、野村氏は一つのケイリー変換だけでなく、連続無限個から成るケイリー変換の族を定義した。より詳しく言えば、当初定義されたケイリー変換は、等質有界領域のベルグマン核に付随して定義されるものであったのに対し、次に、セゲー核に付随するケイリー変換が定義され、さらにそれらを含む、相対不変関数の族に付随するケイリー変換が定義された。そこで、当初のベルグマン核に付随するケイリー変換の性質を探ることが最も重要であると思われるが、それと並行して、ケイリー変換の「族」の性質を明らかにすることが、本研究の第三の目的である。

３．研究の方法

ケイリー変換の性質を解明していく上で手掛かりとなるのは、野村氏と Penney 氏によって初めに定義されたケイリー変換が、ベルグマン核を用いて定義されることである。
任意の（等質とは限らない）有界領域が与えられたとき、その領域上の二乗可積分な正則関数の全体から成るヒルベルト空間の正規直交基底を用いて、ベルグマン核が定義される。ベルグマン核は非常に簡潔な形で定義される関数でありながら、領域の性質を多分に反映する。例えばベルグマン核を用いて、領域の正則自己同型が自動的に等長になるような、ベルグマン計量と呼ばれる標準的なケーラー計量を定義することができる。
ベルグマン核に関しては、様々な方向から研究が成されており、そのような研究成果の中から、ケイリー変換に関連のあるものを見出すべく、研究を行った。
また、低次元の等質ジーゲル領域のケイリ

一変換の像を具体的に計算し、その像の様子を観察しながら、研究を進めた。低次元であっても、ケイリー変換を具体的に計算することは一般には困難である。しかし、研究代表者の以前の、ケイリー変換の像の凸性に関する研究において蓄積した計算の技術を利用して、低次元の像の観察を進めることができた。

４．研究成果

ケイリー変換について伊師英之氏（名古屋大学）と共同研究を行った結果、次のような成果を得た。

ベルグマン核を発見した S. Bergman 自身が、１９２０年代に「代表領域」なる概念を導入している。任意の有界領域に対して、ベルグマン核の対数の勾配をとることによって、領域の各点で局所座標を定義することができる（この座標を与える写像を「ベルグマン写像」と呼ぶことにする）。この座標が大域的に定義できるとき、Bergman はその像を、与えられた有界領域の「代表領域」と呼んだ。複素の単位円板や、より一般に対称有界領域の代表領域は、そのハリッシュ・チャンドラ実現に一致する。

そして等質有界領域の場合には、代表領域がケイリー変換の像と一致することが、共同研究で明らかになった。これによって、ケイリー変換を簡潔に定義できるようになった。さらに、ケイリー変換のもともとの定義では、等質有界領域をまずジーゲル領域として実現する必要があったが、代表領域を用いることによって、ジーゲル領域を経ずにケイリー変換の像を得ることができるようになった。

また代表領域に関して知られている事実を用いることによって、ケイリー変換の像の興味深い性質が明らかとなった。第一には、その体積がある意味で極小となっていることであり、第二には、ケイリー変換の像の中心における、正則自己同型群の固定部分群がユニタリ写像から成る、ということである。

研究代表者が以前に証明した、ケイリー変換の像の凸性による対称ジーゲル領域の特徴付け定理も、本研究の成果によって、ジーゲル領域を用いずに、非常に簡潔に定式化することができた。

また、ベルグマン核から標準的なケーラー計量であるベルグマン計量が定義されることを考えると、ベルグマン写像や代表領域はベルグマン計量に付随するものである、と考えることができる。これと同様な方法で、等質有界領域の等質ケーラー計量に対し、一般ベルグマン写像と呼ばれる双正則写像が定義でき、それが野村氏の導入したケイリー変換の族を与えることも、共同研究で判明した。

上述したような複素領域の研究と並行して、等質ジーゲル領域の定義に現れる「錐」の研究を進めるなかで、まだ部分的な成果ではあるが、錐の因果構造に関する興味深い結果も得た。

錐が与えられたとき、各点において未来・過去の方向を決めるような、「因果構造」と呼ばれる幾何学的構造が自然に導入される。対称ジーゲル領域の定義に現れるような、特別な錐を「対称錐」と呼ぶが、これに関して近年、金行壮二氏（上智大学）が次のようなリウビル型の興味深い定理を証明した：「対称錐の因果構造を保つような自己同型は線型なものに限る」。

研究代表者は、このような定理を対称錐より一般の等質錐や、さらに広いクラスの錐に一般化したいと考え、研究を行った。その結果、ローレンツ錐と呼ばれる対称錐の場合については、初等的な方法による、金行氏の定理の別証明を得た。まだ特別な場合だけではあるが、この証明方法の核心となるアイデアは、対称錐よりもはるかに一般の錐に対しても有効なのではないか、との感触を得ている。

現在のところ、錐は実ベクトル空間の中の対象であり、複素領域の研究とは直接の関係はない。しかし、金行氏が証明に用いた方法は、対称錐を複素領域の境界に埋め込み、その複素領域に対して証明された結果を用いるというものであった。それを考慮に入れると、金行氏の定理の一般化に成功したならば、それが逆に複素領域の研究にフィードバックするという可能性は否定できない。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 2 件）

1. Ishi, H., Kai, C., The representative domain of a homogeneous bounded domain, Kyushu Journal of Mathematics, 64(2010), 35-47, 査読有.

2. Kai, C., A characterization of symmetric cones by an order-reversing property of the pseudoinverse maps, Journal of the Mathematical Society of Japan, 60(2008), 1107-1134, 査読有.

〔学会発表〕（計 4 件）

1. 甲斐千舟, An elementary proof of the linearity of causal automorphims of 3-dimensional Lorentz cone, 2009 年度

表現論ワークショップ, 2009.12.26, とりぎん文化会館（鳥取県）.

2. Kai, C., The representative domain of a homogeneous bounded domain, JSPS-MHESRT Seminar: “Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces”, 2009.11.6, Le Grand Hotel of Kerkennah (Tunisia).

3. Kai, C., A characterization of symmetric cones by an order-reversing property of the pseudoinverse maps, JSPS-RFBR Workshop “Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Quantization”, 2008.8.25, 東京大学玉原国際セミナーハウス（群馬県）.

4. Kai, C., A note on the Bergman metric of bounded homogeneous domains, International Workshop “Problems related to Bergman kernel”, 2008.6.12, 中国科学院数学与系統科学研究院・数学研究所（中国）.

６．研究組織

(1)研究代表者

甲斐　千舟　(KAI CHIFUNE)
金沢大学・数物科学系・助教
研究者番号：70506815