

研究種目：若手研究（スタートアップ）

研究期間：2008～2009

課題番号：20840022

研究課題名（和文） 代数体の分岐条件付ガロア群の岩澤理論的研究

研究課題名（英文） Iwasawa theoretical studies of Galois groups over algebraic number fields with restricted ramifications

研究代表者

水澤 靖 (MIZUSAWA YASUSHI)

名古屋工業大学・大学院工学研究科・准教授

研究者番号：60453817

研究成果の概要（和文）： 代数方程式の解（整係数多項式の根）の対称性を表すガロア群は、分岐条件を付加することによって、素因数分解の一意性など、代数的整数の興味深い性質をよく表す対象となる。高次の素因数分解の様子に関する岩澤理論のある未解決予想は、素数に内在する非可換（非アーベル）な性質を反映したものではないかと考えることにより、ある分岐条件付ガロア群の非可換構造を明らかにするとともに、予想が肯定的となる新しい具体例を発見した。

研究成果の概要（英文）： The Galois groups, which express the symmetry of the solutions of algebraic equations (roots of polynomials with integral coefficients), become the objects expressing a number of interesting properties (for example, uniqueness of prime factorization) of algebraic integers by considering the restricted ramifications. For a certain unsolved conjecture in Iwasawa theory, which concerns the prime factorization in higher dimensions, this research clarifies the non-commutative structures of certain Galois groups with restricted ramifications, and gave new affirmative examples of the conjecture by considering the non-commutative properties which are immanent in prime numbers.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	540,000	162,000	702,000
2009年度	760,000	228,000	988,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,300,000	390,000	1,690,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数的整数論・岩澤理論・ガロア群・代数体

## 1. 研究開始当初の背景

代数体の分岐条件付ガロア拡大が与えられたとき、そのガロア群の構造や、その拡大

における(イデアル類群などの)数論的不変量を解明することは、代数的整数論の主要テーマの一つである。一方、岩澤理論は一つの素数  $p$  に着目し、代数体の  $Z_p$  拡大(ガロア群が  $p$  進整数環  $Z_p$  の加法群と同型となる無限次ガロア拡大)を舞台として、イデアル類群の  $p$ -シロー部分群の振る舞いを記述することから始まった理論である。イデアル類群は一意的な素因数分解の起こりにくさを表す不変量であり、その  $p$ -シロー部分群は不分岐  $\text{pro-}p$  ガロア群(最大不分岐  $\text{pro-}p$  拡大のガロア群)のアーベル商と同一視される。より一般の分岐条件付ガロア群についても、アーベル商は  $\text{ray}$  イデアル類群(の射影極限)と同型となり、そのガロア群の構造から数論的不変量を調べることができる。

これらの理論において「総実代数体の円分  $Z_p$  拡大上の不分岐  $\text{pro-}p$  ガロア群は有限アーベル商を持つ」と主張するグリーンバーグ予想は、国内外で盛んに研究されてきたが、現在でも未解決問題の一つとして残っている。また(研究代表者を含む)非アーベル岩澤理論の研究者は、不分岐  $\text{pro-}p$  ガロア群自身を岩澤理論の研究対象として、その非可換構造の解明に向けて研究を行ってきたが、そこでの困難もグリーンバーグ予想に起因することが多く、その解決に向けた研究が避けられない状況になってきている。

## 2. 研究の目的

当研究課題の目的は、上述のテーマに関連する岩澤理論的な未解決問題に対して、問題を一般化・非可換化することで新たなアプローチを模索し、その解決とともに岩澤理論の発展に貢献することである。特に非アーベル岩澤理論の視点から、グリーンバーグ予想の非可換化・一般化・類似問題を考察し、予想が肯定的と考えられる根拠の本質を明らかにすることを目標としている。その標準的かつ基本的な一歩として、

(1) 有理数体の  $Z_p$  拡大上の馴分岐  $\text{pro-}p$  ガロア群の非可換構造を、主に分岐素点が少ない場合を中心に解明し、その開部分群が有限アーベル商を持つか否かを明らかにすること

(2) 一般グリーンバーグ予想に関連した適切な類似問題に対して、その答えが肯定的か否かを明らかにすること

が具体的な目標である。さらにその研究を通して、類体塔問題などへの応用や関連付けを

得ることも期待している。

## 3. 研究の方法

### (1) グリーンバーグ予想研究の応用

グリーンバーグ予想および類似問題の先行研究の成果を、主に文献資料から調査し、分岐条件付ガロア群の非可換構造の研究に応用できる形に翻訳する。特に、代数体の種の理論や中心拡大の理論など、イデアル類群の構造に関する研究を応用し、また  $p$  上の素イデアルの分解群の様子を把握する研究手法を模倣する。

### (2) 計算機による構造計算

計算機環境を整備し、分岐条件付ガロア群の部分商をイデアル類群として計算する。特に  $p$  が 2 または 3 の場合に、 $Z_p$  拡大の高次の部分拡大に対して、その  $\text{ray}$  イデアル類群の構造(階数・位数・生成元)を計算し、イデアルの単項化の様子と合わせて、数値データとして収集・整理する。その数値データから、群論的に扱いやすい分岐条件を探索する。

(計算のためのソフトウェアとして PARI/GP を使用したところ、メモリを増設することにより、判別式が比較的大きい場合でも計算することができ、最長でも 2 日程度で計算結果が出力された。)

### (3) 類体塔研究の応用

$Z_p$  拡大上の分岐条件付ガロア群に対しても、類体塔のガロア群の研究手法が有効である。先行する類体塔研究で用いられた  $p$  群の定理を、主に文献資料から調査し、 $\text{pro-}p$  群に対する主張に拡張しながら、 $Z_p$  拡大上の分岐条件付  $\text{pro-}p$  ガロア群に適用できる形に翻訳する。

### (4) 群論的計算

適切な分岐条件の下で、部分群の階数・位数の増加傾向や、分解群・惰性群が埋め込まれている様子を、数値データから群論的に把握する。それを基に、分岐条件付  $\text{pro-}p$  ガロア群の非可換構造を、降中心列の各商の構造を記述することにより明らかにしてゆく。

### (5) 研究協力者からの知識提供

不分岐  $\text{pro-}p$  ガロア群の非可換構造と一般グリーンバーグ予想との関連について、研究協力者に専門的知識の提供を求める。その知見を基に、一般グリーンバーグ予想に関連する類似問題の設定を、肯定的と予想し得る形に修正する。さらに、その専門的見地からの

助言を得ることにより、非アーベル岩澤理論の視点から研究方法を修正する。

#### (6) セミナー・研究集会

以上の研究と並行して、適宜、適切な時期に研究打合せを行い、部分的な成果をセミナーや学会において発表し、同分野の研究者に意見・助言を求める。さらに関連する研究集会において、異なる視点からのアイデアや最新の研究資料・情報を入手することにより、不十分な箇所を補いながら研究計画を修正し、研究成果を改良してゆく。

### 4. 研究成果

(1) 有理数体の  $Z_p$  拡大上の馴分岐  $\text{pro-}p$  ガロア群について、次の定理を証明した。

**定理** 奇素数  $p$  と素数  $q_1, q_2$  に対して、次を仮定する。

- ①  $q_1, q_2$  は、 $p$  を法として 1 と合同だが、 $p$  の平方を法として 1 と合同でない。
- ②  $p$  は  $q_1$  を法として  $p$  冪剰余である。
- ③  $p$  は  $q_2$  を法として  $p$  冪剰余でない。
- ④  $q_2$  は  $q_1$  を法として  $p$  冪剰余でない。

このとき、 $q_1, q_2$  からなる集合  $S$  に対して、有理数体の  $Z_p$  拡大上の最大  $S$  外不分岐  $\text{pro-}p$  拡大のガロア群 (馴分岐  $\text{pro-}p$  ガロア群) はメタ巡回  $\text{pro-}p$  群であり、その交換子群は有限  $p$ -群である。

さらに、この定理のグリーンバーグ予想への応用として、次の結果を得た。

**系** 定理と同じ仮定の下、有理数体の  $Z_p$  拡大上の最大  $S$  外不分岐  $\text{pro-}p$  拡大に含まれる任意の有限次代数体の円分  $Z_p$  拡大に対して、グリーンバーグ予想は肯定的である。

これらの結果は、 $Z_p$  拡大上の分岐条件付  $\text{pro-}p$  ガロア群が有限表示を持つ新しい具体例およびグリーンバーグ予想が肯定的である新しい具体例を与えており、さらに改良を施した後、国内外の学術雑誌において発表される価値が十分にあるものと考えられる。

また、この成果を国内のセミナー等で発表したことにより、グリーンバーグ予想の類似問題に反例が存在することなど、研究協力者から有益な助言を得ることができた。それを基に、定理における馴分岐  $\text{pro-}p$  ガロア群の非可換構造を完全に記述し、仮定を弱めるなどの改良を行うことが今後の目標である。

(2) 実 2 次体の  $Z_2$  拡大上の不分岐  $\text{pro-}2$  ガロア群について、次の定理を証明した。

**定理** 16 を法として 9 と合同な素数  $p$  と、4 を法として 3 と合同な素数  $q$  に対して、判別式が  $4pq$  である実 2 次体の  $Z_2$  拡大上の最大不分岐  $\text{pro-}2$  ガロア群 (不分岐  $\text{pro-}2$  ガロア群) はメタ巡回  $\text{pro-}2$  群であり、その交換子群は有限 2-群である。

さらにその証明過程において、次の結果を得た。

**補題** 定理と同じ仮定の下、2 が  $p$  を法として 4 冪剰余であるならば、判別式が  $4pq$  である実 2 次体の  $Z_2$  拡大上の不分岐  $\text{pro-}2$  ガロア群は、階数 2 のアーベル群である。

これらの結果は、 $Z_2$  拡大上の不分岐  $\text{pro-}2$  ガロア群の構造が簡明な新しい具体例を与えると同時に、その非可換構造への分岐条件の影響を把握し得る状況を導いている。

また、これらの定理とグリーンバーグ予想研究の手法を応用し、計算機によるイデアル類群の構造計算を行うことで、グリーンバーグ予想が肯定的である新しい具体例も得ることができた。例えば判別式が  $4 \cdot 73 \cdot 223$  である実 2 次体の  $Z_2$  拡大上の不分岐  $\text{pro-}2$  ガロア群は、 $(8, 2)$  型の有限アーベル群である。この研究によって、類体塔の有限性とグリーンバーグ予想の難しさは、互いに独立したものと考えらるべきであることが判明した。

これらの成果は、アメリカ数学会の学術雑誌に論文として受理されている。国内外で広く購読されている学術雑誌であり、国内外の岩澤理論・類体塔の研究者からの注目が期待される。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

- ① Yasushi Mizusawa, On unramified Galois 2-groups over  $Z_2$ -extensions of real quadratic fields, Proceedings of the American Mathematical Society, 掲載確定、2010、査読有、DOI : 10.1090/S0002-9939-10-10458-4
- ② 水澤 靖, 基本  $Z_p$  拡大上の馴分岐  $\text{pro-}p$  ガロア群について、鏡ヶ池の整数論セミナー報告集 (名古屋大学多元数理科学研究科), 査読無, 2008, 115-1

20, 名古屋大学学術機関リポジトリ :  
<http://hdl.handle.net/2237/11242>

[学会発表] (計1件)

- ① 水澤 靖, 尾崎 学, 基本  $Z_p$  拡大上の  
馴分岐  $\text{pro-}p$  ガロア群について, 200  
9年度日本数学会秋季総合分科会, 20  
09年9月25日, 大阪大学

[その他]

ホームページ等

<http://kaken.nii.ac.jp/ja/p/20840022>

<http://kaken.nii.ac.jp/en/p/20840022>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

水澤 靖 (MIZUSAWA YASUSHI)

名古屋工業大学・大学院工学研究科・准教  
授

研究者番号 : 60453817

### (2) 研究分担者

該当無し

### (3) 連携研究者

該当無し