

平成 22 年 5 月 28 日現在

研究種目：若手研究（スタートアップ）

研究期間： 2008 ～ 2009

課題番号：20840033

研究課題名（和文） 非圧縮性粘性流体の渦度場に関連した非線形偏微分方程式の研究

研究課題名（英文） Mathematical analysis of nonlinear partial differential equations related with vorticity fields of viscous incompressible flows

研究代表者

前川 泰則 (MAEKAWA YASUNORI)

神戸大学・大学院理学研究科・講師

研究者番号：70507954

研究成果の概要（和文）：水などの非圧縮性流体の運動においてはその渦度場が重要な役割を果たすことが知られている。本研究では、この渦度場に関連した非線形偏微分方程式を中心としてその数学解析を行い、いくつかの大きな成果を挙げる事ができた。特に、乱流中で普遍的に表れる微細な渦管構造と関連した、ある定常な流れの安定性解析を行い、その結果、その定常な流れが3次元的な微小攪乱に対して安定であることを数学的に証明することに成功した。本研究で得られたこうした成果は、偏微分方程式の解析や乱流における複雑な局所構造の解明に大きく貢献するものである。

研究成果の概要（英文）：It is well-known that vorticity fields play important roles in dynamics of incompressible flows. This research aims to analyze linear and nonlinear partial differential equations related with vorticity fields mathematically. As one of the results obtained in this research, it is rigorously proved that some stationary solutions which are known as a model of a coherent structure of vortex tubes in turbulent flows are asymptotically stable with respect to small three-dimensional perturbation flows. This research has successfully made an important contribution in the theory of partial differential equations and the study of the dynamics of turbulent flows.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,290,000	387,000	1,677,000
2009年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,490,000	747,000	3,237,000

研究分野：偏微分方程式

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：偏微分方程式、流体力学、非圧縮性粘性流体、Navier-Stokes 方程式、渦度方程式、Burgers 渦、安定性解析

1. 研究開始当初の背景

水などの流体の速度場は非圧縮性 Navier-Stokes 方程式によって記述され、これまで非常に多くの研究がなされてきた。しかしながら、その複雑な非線形性から、特に 3 次元の場合には解明されていない問題も多い。一方で、流体の局所的な振る舞いにはその渦度場が重要な役割を果たすことが知られている。渦度場の満たす方程式である渦度方程式は、Navier-Stokes 方程式に curl 作用素を作用させることで形式的に得ることができる。渦度方程式そのものの数学的研究は、例えば時間局所的な強解や小さな自己相似解の存在を示した結果が知られていたが、Navier-Stokes 方程式に対する膨大な研究に比べるとむしろ少なく、未知の部分が多い。さらに渦度方程式の非線形項がもつ数学的構造は、2 次元の場合でさえ近年新しい発見が成されるなど、今後さらなる進展が期待される分野であった。こうした状況に基づき、本研究では渦度場に関連した非線形偏微分方程式研究を行った。

2. 研究の目的

本研究では、水などの非圧縮性粘性流体の運動をその渦度場に着眼して解析することを目的としている。特に、乱流中の微細な渦管構造の生成と深く関わっている Burgers 渦と呼ばれる Navier-Stokes 方程式のある定常解の安定性を調べるのが一つの大きなテーマである。

非圧縮性粘性流体のダイナミクスにおいて、粘性による拡散効果と渦度場の伸張効果という二つのメカニズムが基本的な役割を果たすことが知られている。1948 年、Burgers は 3 次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対し、渦 Reynolds 数と呼ばれる渦度の大きさを表す物理量をパラメータとする定常解の族を発見した。この定常解は x_3 軸に関して対称であり、対応する渦度場は軸対称 Burgers 渦と呼ばれ、上に述べた二つのメカニズムのバランス状態を端的に表す解として調べられてきた。さらに近年、軸対称 Burgers 渦の周りに非軸対称な定常解（以降、軸対称の場合も含めて単に Burgers 渦と呼ぶことにする）が存在することも示されていた。

Burgers 渦は、単に特殊な定常解であるのみならず、流体が乱流状態になったときに典型的に現れる微細な渦管構造をよく近似することが数値計算や実験で指摘されるなど、流体の局所構造との関連が強く示唆されている。こうしたことから、Burgers 渦の安定

性は物理的にも数学的にも重要な問題として研究されている。これまでは、少なくとも 2 次元的な摂動に対しては軸対称 Burgers 渦が安定であることが数学的に示されていた。さらに線形化作用素に対するスペクトル解析により、渦 Reynolds 数が大きくなるにつれて軸対称 Burgers 渦が 2 次元的な摂動流をより早く対称化させる性質を持つことも示されている。このように Burgers 渦の線形化作用素は数学的に豊富な構造を持っていることが示唆されていた。

Burgers 渦の安定性は、「Burgers 渦が軸対称の場合と非軸対称の場合」、「渦 Reynolds 数が十分小さい場合・十分大きい場合・どちらでもない場合」、及び「摂動が 2 次元である場合と 3 次元である場合」とで問題が区別される。上記の研究によって軸対称 Burgers 渦の 2 次元的な摂動に対する安定性や渦 Reynolds 数が十分小さいときの非軸対称 Burgers 渦の安定性は既によく調べられている。

しかし、特に 3 次元的な摂動に対する安定性については、その物理的重要性にも関わらず、Burgers 渦が軸対称な場合であってもほとんどわかっていなかった。本研究の目的は、軸対称 Burgers 渦の 3 次元的な摂動に対する安定性を明らかにすることである。特に、3 次元的な摂動を考察したときにあらわれる線形化作用素に対して、あらたな数学的構造を見出すことを目的とする。

3. 研究の方法

本研究を推進するためには情報収集や専門家との意見交換が重要であった。そのため、本研究の科研費により、必要となる偏微分方程式論や流体力学の専門書を多数購入した。また、京都大学での「流体と気体の数学解析」や北海道大学での「偏微分方程式札幌シンポジウム」など各研究集会に参加し、情報収集を行った。さらに、渦度方程式や Burgers 渦について先駆的な研究をされている東大の儀我美一氏や Fourier Institute (France) の Th. Gallay 氏等を訪れ、意見交換を行った。2009 年 9 月から 2010 年 3 月にかけては、ミネソタ大学の IMA に長期滞在し、研究を行った。これらに伴う国内及び国外旅費に科研費を使用した。

以下、学術的側面からの研究方法を述べる。

* 軸対称 Burgers 渦の 3 次元的な摂動に対する安定性の研究

3 次元的な摂動流に対する軸対称 Burgers 渦

の安定性を調べるために、当分野の専門家である Th. Gallay 氏と共同研究を行った。以下に述べるように、摂動流が 3 次元である場合は 2 次元であるときと比べて問題がかなり複雑になる。

・摂動が 2 次元であるときには渦度場は本質的にスカラー値関数であるのに対し、今回は $\{\mathbf{v}\}^3$ 値の関数を扱うことになるため、各成分間の相互作用を解析する必要がある。

・摂動が 2 次元であるときには渦度方程式の非線形項は輸送項のみであるが、摂動が 3 次元であるとき輸送項に加えて伸張項と呼ばれる新たな非線形項が存在する。この新たな非線形項からの寄与を考慮する必要がある。

安定性を調べる上で重要なステップとなるのが線形化作用素のスペクトル解析である。Burgers 渦の線形化作用素はパラメータをポテンシャルの項に含んでおり、線形化作用素のスペクトルのポテンシャル依存性を調べるという数学的に重要なテーマが現れる。特に、この線形化作用素は自己共役ではなく、スペクトルの分布を解析するには方程式の特殊な構造を見つける必要がある。こうした解析には、関数解析、スペクトル理論、フーリエ解析などを駆使する必要がある。

4. 研究成果

本研究で行われた Th. Gallay 氏との共同研究により、Burgers 渦が 3 次元的な微小攪乱に対しても漸近安定であることが示された。これは長らく未解決であった問題に対して一つの決着をつけたものであり、乱流中で頻繁に渦管構造が観測されることに対する数学的な裏付けを与える重要な結果である。さらに本研究では、安定性を示す上で重要な線形化作用素のスペクトルと虚軸との距離に対して、Burgers 渦の大きさによらない一様な評価を得ることができた。これらは既存の数値計算による研究でも知られていなかった新しい結果であると思われる。

安定性を示す上で鍵となるステップは

- (1) 線形化作用素のもつ垂直軸方向に対する特殊な安定化効果を示す
- (2) 線形化作用素を本質的に 2 次元的な部分と 3 次元的な部分に分解する
- (3) 作用素の垂直軸方向と水平軸方向の依存性を見極め、(1) で得られた垂直軸方向の安定性効果を有効に用い

る

というものであった。本研究で得られたこうした安定性の証明は数学的にも本質的に新しいアイデアを含んでいる。これらは偏微分方程式の数学解析における一般論や抽象論に重要な具体例と示唆を与えるものであり、当分野自体に大きく寄与するものである。

また、本研究では Burgers 渦の安定性以外にもある 2 階楕円型方程式に対して、その解が空間遠方でどのような減衰をするのかという問題に取り組んだ。これは間接的に Burgers 渦の安定性ともかかわっている問題であり、また、その他にも非線形偏微分方程式の自己相似解の性質とも関わっている重要な問題である。本研究により、解の空間遠方での精密な各点減衰評価が得られ、既存の結果を大きく改良することに成功した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

① Maekawa, Y.; Existence of asymmetric Burgers vortices and their asymptotic behavior at large circulations, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 19 (2009), 669-705. 査読有

② Maekawa, Y.; On the existence of Burgers vortices for high Reynolds numbers, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 349 (2009), 181-200. 査読有

③ Maekawa, Y.; A lower bound for fundamental solutions of the heat convection equations, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 189 (2008), no. 1, 45-58. 査読有

④ Maekawa, Y.; On spatial decay estimates for derivatives of vorticities with application to large time behavior of the two dimensional Navier-Stokes flow, *Journal of Mathematical Fluid Mechanics.*, 10 (2008), no. 1, 89-105. 査読有

[学会発表] (計 10 件)

① Yasunori Maekawa, 「Three dimensional stability of the axisymmetric Burgers vortex」, *International Workshop on*

Mathematical Fluid Dynamics,
2010.3.8-3.16, Waseda University.

② Yasunori Maekawa, 「Stability of the axisymmetric Burgers vortex」, Mathematical Analysis on the Navier-Stokes Equations and Related Topics, Past and Future - In memory of Professor Tetsuro Miyakawa, 2009.12.7-12.9. Kobe University

③ 前川泰則, 「Burgers渦の安定性に関する数学解析」, RIMS研究集会 オイラー方程式の数理: 渦運動と音波 150年, 2009.7.21-7.23, 京都大学数理解析研究所.

④ 前川泰則, 「Stability of the axisymmetric Burgers vortex」, RIMS研究集会 流体と気体の数学解析, 2009.7.8-7.10, 京都大学数理解析研究所.

⑤ 前川泰則, 「Asymptotic behaviors of solutions to evolution equations in the presence of translation and scaling invariance」, 奈良女子大学偏微分方程式研究集会, 2009.6.27-6.28, 奈良女子大学.

⑥ 前川泰則, 「Burgers渦の3次元摂動に対する安定性について」, 若手による流体力学の基礎方程式研究集会, 2009.3.9-3.10, 名古屋大学.

⑦ 前川泰則, 「Stability of the Burgers vortex」, 微分方程式の総合的研究, 2008.12.20-12.21, 京都大学.

⑧ Yasunori Maekawa, 「Asymmetric Burgers vortices at large circulations」, Workshop Mathematical Fluid Dynamics, 2008.9.8-9.10, Technische Universität Darmstadt.

⑨ Yasunori Maekawa, 「Mathematical approach to asymmetric Burgers vortices at large circulations」, RIMS研究集会 渦運動150年, 2008.7.16-7.18, 京都大学数理解析研究所.

⑩ Yasunori Maekawa, 「On a free boundary problem of the coupled Navier-Stokes / mean curvature equations」, RIMS研究集会 パターンダイナミクスの数理とその周辺, 2008.6.25-6.27, 京都大学数理解析研究所

6. 研究組織

(1) 研究代表者

前川 泰則 (MAEKAWA YASUNORI)
神戸大学・大学院理学研究科・講師
研究者番号: 70507954