様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　３月　２３日現在

研究種目：若手研究(ｽﾀｰﾄｱｯﾌﾟ)
研究期間：2008　～　2009
課題番号：20840036
研究課題名（和文）：Ｆ爆発と特異点の研究

研究課題名（英文）：Study of F-blowup and singularity

研究代表者
安田　健彦（YASUDA　TAKEHIKO）
鹿児島大学・大学院理工学研究科（理学系）・准教授
研究者番号：30507166

研究成果の概要（和文）：F 爆発と特異点に関する研究を推し進め、複数の結果を得た。F 爆発列の単調性と F 純特異点の関係、F 爆発列の有界性と有限 F 表現型特異点との関係、F 爆発と非可換代数幾何の関係などが明らかになった。特に、F 爆発と非可換代数幾何の関係の発見により、思いがけない研究発展の方向性が見いだされた。この中で、非可換フロベニウス射を定義し、それを非可換特異点解消に応用した。

研究成果の概要（英文）：In this research, I studied F-blowup and singularity, and obtained several results. Relations between two different subjects have been found out. Monotonicity of F-blowup sequence and F-pure singularity. Boundedness of F-blowup sequence and singularity of finite F-representation type. The F-blowup and the noncommutative algebraic geometry. Especially, the last one has offered a new direction to my research. Then I have introduced the noncommutative Frobenius morphism and applied it to noncommutative desingularization.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００５年度			
２００６年度			
２００７年度			
２００８年度	1,320,000	396,000	1,716,000
２００９年度	1,200,000	360,000	1,560,000
総　計	2,520,000	756,000	3,276,000

研究分野：代数幾何学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：特異点、正標数

１．研究開始当初の背景

正標数の代数多様体はフロベニウス射という自分自身への奇妙な射を持つ。私は、その普遍平坦化としてF爆発というものを導入した。一般に爆発とは、代数多様体を変形する操作の一種で、特異点（滑らかでない点）を消すために使われる。Ｆ爆発は新しい爆発の構成法である。当研究開始までに、Ｆ爆発は様々な研究分野と関連する、興味深い研究対象であることが分かってきていた。しかし、まだ導入されてから日が浅く、私だけが研究

している状態で、多くの基本的課題が手つかずのまま残されていた。

以下では研究の背景をテーマごとに、より具体的に述べる。

(1) G ヒルベルト・スキーム、McKay 対応との関係

McKay 対応という現象の一つである物理学者による予想を動機として、伊藤-中村は有限群 G が作用する非特異代数多様体 X に対し、G ヒルベルト・スキームというものを定義した。これは商多様体 X/G の爆発になっている。G ヒルベルト・スキームは、適当な条件の下ではクレパント特異点解消という特別な性質を持った特異点解消になるなど、興味深い研究対象である。驚くべき事に、正標数では、G ヒルベルト・スキームから商多様体 X/G のＦ爆発に同型射が存在する。このように、G ヒルベルト・スキームを通して、Ｆ爆発は McKay 対応と繋がっている。また、F 爆発は G ヒルベルト・スキームの商特異点から任意の特異点（正標数）への一般化と言うことも出来る。

(2) Ｆ爆発の明示的計算

トーリック多様体のＦ爆発はグレブナー基底の理論による、非常に綺麗な記述を持つ。特に、F 爆発から定まる扇は標準的に定まる単項式イデアルのグレブナー扇となる。従って、Ｆ爆発はグレブナー基底の専門家にとっても、興味深い研究と計算の対象となるだろう。

(3) Ｆ爆発列の単調性とＦ特異点

フロベニウス射の分離や密着閉包の理論を使い、様々な特異点のクラスが定義された。これらは総じてＦ特異点と呼ばれ、近年盛んに研究されている。最近の研究で、Ｆ特異点とＦ爆発列の単調性の間に密接な関係がありそうだと分かってきた。これは、Ｆ特異点とＦ爆発の関係の氷山の一角にすぎないだろう。

(4) Ｆ爆発の有界性とフロベニウス射の同時平坦化

商特異点とトーリック特異点では、Ｆ爆発の列は、あるひとつの爆発で押さえられる。つまりＦ爆発列は有界である。これは、ひとつの爆発でフロベニウス射の繰り返し全てを同時に平坦化できることを意味する。これは、全く非自明な主張で、フロベニウス射を使った様々なテクニックの応用に有益だと考える。

２．研究の目的

研究の背景で述べたように、Ｆ爆発は非常に興味深い研究対象であるにもかかわらず、多くの基本的課題が手つかずのまま残されていた。本研究の目的は、これからの課題に取り組み、将来の応用に備え、Ｆ爆発の基礎を固めることである。また、研究集会での発表などを通して、より多くの研究者にＦ爆発を知ってもらうことも目的の一つである。また他の研究者との研究討議などの中で、Ｆ爆発の新しい発展の方向性が見いだされた場合は、それを研究することも目的の１つであった。

以下では研究の目的をテーマごとに、より具体的に述べる。

(1) G ヒルベルト・スキーム、McKay 対応との関係

G ヒルベルト・スキームと F 爆発の同型が G が可換群の場合に示されていたが、本研究では、G が非可換の場合に一般化することを目指す。また、Ｆ爆発と McKay 対応の具体的なつながりを探る。

(2) Ｆ爆発の明示的計算

本研究では、トーリックでない特異点のＦ爆発を明示的に記述することを目指す。具体的にはＦ爆発を、あるイデアルに沿った爆発として表し、そのイデアルの爆発代数を明示的に記述する。

(3) Ｆ爆発列の単調性とＦ特異点

本研究の研究発表の場などで、Ｆ特異点の専門家と研究討議を行い、Ｆ特異点とＦ爆発の様々な関係を見つけたい。新しい関係が見つかり、その重要性が高い場合は、それについても研究を行う。

(4) Ｆ爆発の有界性とフロベニウス射の同時

平坦化

本研究では、Ｆ爆発列は常に有界かどうか見極めたい。もし、答えが否定的な場合は、Ｆ爆発が有界となる、特異点の良いクラスを探す。本研究により代数幾何におけるフロベニウス射を使う様々なテクニックの適用範囲が広がり、新たなテクニックが生まれることなどが期待される。

３．研究の方法

Ｆ爆発と非可換代数幾何の関連については戸田幸伸氏（東京大学・数物連携宇宙研究機構）と共同で研究を行った。主にＥメールと電話で、意見、アイデア、情報の交換を行い、また、それを元に各自で計算、論理の確認などを行った。研究の詰めの段階で、私が数物連携宇宙研究機構に出張し、そこで議論を重ねて、その後、論文をまとめた。

それ以外の研究は基本的に一人で行った。共同研究、単独研究のどちらにおいても、研究の下準備や、研究を進めるために、論文や書籍を読み、新しい分野の数学を勉強し、また最新の研究結果に関する知識をみにつける必要があった。また、論文を検索し、ダウンロードするなど、情報収集・整理のためにインターネット、コンピューターを大いに活用した。

研究集会に参加し、研究討議や意見交換を行い、その中で得た情報が、研究を進めるうえで、有益であった。

以下では研究方法をテーマごとにより具体的に述べる。

(1) Ｆ爆発列の単調性とＦ純特異点

局所的な単調性の十分条件を探しているなかで、その候補として集合論的に自然な条件を考えてみたところ、それは実際にスキーム論的にも十分条件となることが分かった。また、その一方でＦ特異点の専門家との意見交換をする中で、Ｆ純特異点という概念の存在を知り、この特異点のクラスに対しては、Ｆ爆発列が単調になることが確かめられた。

(2) Ｆ爆発列の有界性と有限Ｆ表現型特異点

本研究以前に商特異点とトーリック特異点に対してはＦ爆発列が有界になることが分かっていた。これらの結果は、別の方法で証明されていた。この二つの特異点のクラスに共通する性質で、Ｆ爆発列と関係するものを探していて、有限Ｆ表現型特異点にたどり着いた。ごく簡単な議論で、有限Ｆ表現型特異点のＦ爆発列は有界であることが示される。

(3) 非可換群に対する Ｆ 爆発と Ｇ ヒルベルト・スキームの同型

有限群の表現に関する対称積に関する Bryant の結果を知り、それを応用することでＦ爆発とＧヒルベルト・スキームの同型を非可換群に対しても証明することが出来た。

(4) Ｆ爆発と非可換代数幾何

Bridgeland-King-Reidによる導来McKay対応と呼ばれる重要な結果がある。また Van den Bergh による導来 McKay 対応の非可換代数幾何による解釈がある。戸田幸伸氏と共同で、これらの結果を、正標数のＦ爆発に対して、適用することで、導来 McKay 対応と類似の結果を得た。

４．研究成果

テーマごとに研究成果を述べる。

(1) Ｆ爆発列の単調性とＦ純特異点

Ｆ爆発は第１Ｆ爆発、第２Ｆ爆発、…、と爆発の列からなるが、この列が単調であるかどうかは自然な疑問である。本研究では、局所的に単調となるための十分条件を示した。その結果として、Ｆ純特異点のＦ爆発列は単調であることが示される。この結果は、Ｆ爆発による特異点解消（特に２次元の場合）の研究において、役に立つ可能性がある。

(2) Ｆ爆発列の有界性と有限Ｆ表現型特異点

Ｆ 爆発の列が有界である（ある１つの爆発で押さえられる）ことと、フロベニウス射の繰り返しが１つの爆発で同時に平坦化されることは同値である。本研究では、有限Ｆ表現型特異点にたいして、Ｆ 爆発列は有界であることが分かった。ちなみに、本研究以前に、（正規とは限らない）トーリック特異点に対

し、F 爆発列の有界性が分かっていた。有限F 表現型特異点は、他にも良い性質を持つことが、知られている。F 爆発の有界性は、有限F表現型特異点のさらなる研究に影響を与えるだろう。

(3) 非可換群に対する F 爆発と G ヒルベルト・スキームの同型

本研究以前は、可換群に対してF爆発とGヒルベルト・スキームの同型が示されていたが、これを非可換群の場合に拡張することに成功した。これにより定理を、望ましい十分に一般的な形にまとめることが出来た。

(4) F爆発と非可換代数幾何

戸田幸伸氏（東京大学・数物連携宇宙研究機構）と共同でF爆発を非可換代数幾何の観点からとらえる研究を行った。この研究により、G ヒルベルト・スキームと F 爆発の間の同型の別証明を与えた。この証明の中で、F 爆発と McKay 対応との関連がより明らかになった。この結果により、F 爆発や正標数のテクニックと非可換代数幾何の間の関係が非常に重要な研究対象であることが明らかになった。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

(1) Yukinobu Toda, Takehiko Yasuda, Noncommutative resolution, F-blowups and D-modules, Advances in Mathematics, 査読有り, 222 (2009), 318-330

(2) Takehiko Yasuda, On monotonicity of F-blowup sequences, Illinois Journal of Mathematics, 査読有り, 53 (2009), 101-110

〔学会発表〕（計５件）

(1) Takehiko Yasuda, Frobenius morphisms and noncommutative resolutions, Algebraic geometry in characteristic p and related topics, ２０１０年２月１９日, Tokyo, Japan

(2) Takehiko Yasuda, An application of the Frobenius morphism of a noncommutative blowup, Higher Dimensional Algebraic Geometry, ２００９年１２月１７日, Kyoto, Japan

(3) Takehiko Yasuda, Noncommutative resolution and Frobenius morphism, The 5th Franco-Japanese Symposium on Singularities, ２００９年８月２７日, Strasbourg, France

６．研究組織
(1)研究代表者

安田　健彦（YASUDA　TAKEHIKO）
鹿児島大学・大学院理工学研究科（理学系）・准教授
研究者番号：30507166