

平成22年 6月 22日現在

研究種目：若手研究（スタートアップ）

研究期間：2008～2009

課題番号：20840038

研究課題名（和文） 自明な結び目を識別する結び目不変量の構造研究

研究課題名（英文） Study on knot invariants detecting the unknot

研究代表者

長郷 文和 (NAGASATO FUMIKAZU)

名城大学・理工学部・助教

研究者番号：30513634

研究成果の概要（和文）：この研究では、自明な結び目を識別する結び目不変量の構造を調べることが目的である。特に、結び目 K の構造を $SL(2, C)$ に代数的に実現した指標代数多様体 $X(K)$ の構造について調べる。 $X(K)$ は、代数方程式族の解空間として表わされるが、特に、この方程式族に、特殊な方程式を1つ追加することで得られる断面 $S(K)$ が、small 結び目（比較的複雑でない結び目）においては、自明な結び目を識別することがわかった。この性質から、いくつかの応用が得られた。

研究成果の概要（英文）：This study is concerned with a research on the structure of knot invariants (possibly) detecting the unknot. More precisely, we focus on the geometric structure of the character variety $X(K)$, which is defined by the zeros of some algebraic polynomials associated with a knot K . In fact, we found that the section (subvariety) $S(K)$ of $X(K)$ defined by a special equation can detect the unknot in the set of small knots. This result can give some applications to the knot theory.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2009年度	820,000	246,000	1,066,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,920,000	576,000	2,496,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：幾何学

キーワード：結び目, 結び目群, character variety, Chebyshev 多項式

1. 研究開始当初の背景

位相幾何学の舞台となる位相空間(多様体)は、その内部に存在するループの複雑さにより、空間自体の複雑さを測ることができる。このループの成す集合は基本群と呼ばれ

る群を形成するが、閉3次元カテゴリーでは『基本群が自明ならば、空間は3次元球面(自明な閉3次元多様体)である』ことがポアンカレ予想(定理)からわかる様に、その性能は非常に高い。

さて、結び目を位相幾何学的に研究するには、この基本群を用いる方法が挙げられる。例えば、結び目群 $G(K)$ (結び目 K の外部空間の基本群) はその代表例である。結び目群の特徴は、結び目の幾何学的性質をより豊富に反映した対象であると考えられる。実際、結び目群は自明な結び目を識別する。しかし、結び目群の問題点は(群の計算の複雑性から)その実用性に乏しいところにある。研究代表者は、結び目群の $SL(2, C)$ 表現の集合を考えることにより、群の複雑さを捉え、その情報を基に結び目の幾何学的性質の研究を行ってきた。ここで、結び目群 $G(K)$ の $SL(2, C)$ 表現の指標(character)全体は、複素空間内の代数多様体(以降、character variety $X(K)$)を形成することが知られている。これにより、結び目群の研究は、代数多様体の幾何構造の研究に置き換えられる。また、character variety は(結び目群とその $SL(2, C)$ 表現の性質から)自明な結び目を識別する。このとき、既約表現が、その識別機能の重要な役割を担っているが、その既約表現にはどのくらいの種類があるのかは定かではない。

2. 研究の目的

本研究の目的は、character variety を用いて結び目(外部空間)を捉えたとき、自明な結び目を識別する character variety の構造研究である。この研究視点は、結び目理論の DNA(デオキシリボ核酸)などの微生物学への応用や、contact homology 等との関連から得られたものであり、上記を本研究の目的とすることで、背景にあるこれらの分野への寄与も考えられる研究である。

3. 研究の方法

結び目 K の構造を $SL(2, C)$ に代数的に実現した指標代数多様体 $X(K)$ を、ある特別な方程式により切断し、それにより得られる断面 $S(K)$ を用いて $X(K)$ の構造を調べる。ここで断面 $S(K)$ とは以下の様に構成される $X(K)$ の部分代数多様体である。

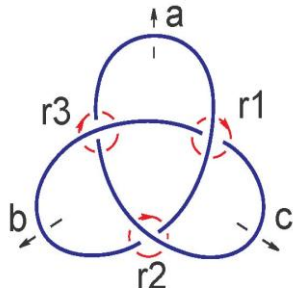


図 1 : 三様結び目の Wirtinger 表示

結び目群 $G(K)$ に対し、その Wirtinger 表示(三葉結び目 3_1 については図 1 を参照)を用いて、 $SL(2, C)$ への表現 ρ を構成する。このとき、すべての表現はトレース恒等式(trace identity)により、いくつかの多項式の共通零点として表わされる。この零点集合を $X(K)$ と表し、結び目 K の character variety とよぶ。例えば、三様結び目 3_1 の場合、トレース恒等式から $X(3_1)$ は $(y+2)(y+x^2-1)=0$ の解として表わされる(図 2 参照)。但し、 $x=-\text{trace}(\rho(a))$, $y=-\text{trace}(\rho(ab^{-1}))$ とする。

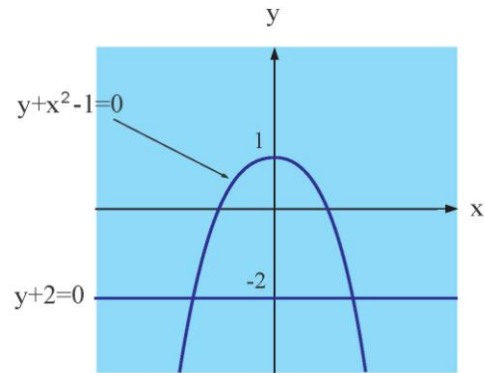


図 2 : $X(3_1)$ の実平面上のグラフ

ここで、メリディアンとよばれる結び目群の元が常にとれるが、メリディアンがすべてトレースフリー(トレースが 0)の行列に表現される表現をすべて考える。これは、 $X(3_1)$ においては、超平面 $x=0$ (即ち y 軸)により、 $X(3_1)$ を切断して得られる断面に対応している。この様にして得られる $X(K)$ の断面のことを $S(K)$ と表す。 $S(3)$ は 2 点のみからなることが、計算により確認できる(図 3 参照)。

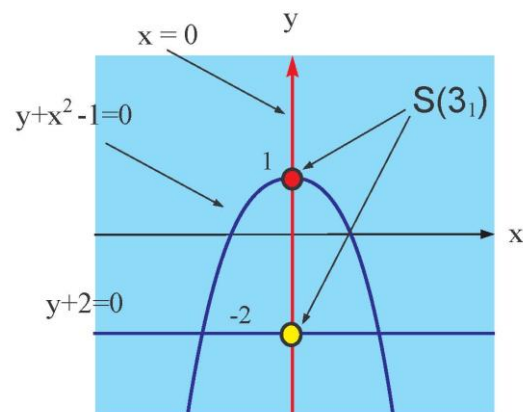


図 3 : $S(3_1)$ の実平面上のグラフ

4. 研究成果

以下に得られた主要結果を述べる.

(1) 自明な結び目の識別

結び目 K の character variety $X(K)$ の断面 $S(K)$ が, small 結び目 (比較的複雑でない結び目) においては, 自明な結び目を識別することがわかった. 交点数が少ない結び目は, その殆んどが small 結び目であることや, small でない結び目 K に対して, 断面 $S(K)$ が 2 点以上からなる例しか未だに見つからないことから, 断面 $S(K)$ は自明な結び目を識別することが期待される. これについては, 現在も研究遂行中である.

(2) $X(K)$, $S(K)$ の既約成分の個数の性質

2 橋結び目 K については, 断面 $S(K)$ の (複素数体上の) 既約成分の具体的な研究が可能である. ここで要となるのが, Chebyshev 多項式である. 実は, Chebyshev 多項式の性質から, ツイスト結び目とよばれる, ある種の 2 橋結び目の断面 $S(K)$, さらに $X(K)$ の (複素数体上の) 既約成分の定義多項式が具体的に表示されることがわかった. また, その性質の深化により, $X(K)$ の既約成分の個数が 2 つであること, 特に, 既約表現を含む既約成分は唯一つしかないことがわかる. この結果は結び目の半順序に関する研究へ応用できる. 現在, この応用に関しての研究を遂行中である.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- ① Fumikazu Nagasato, Kanau Hamai, *Background of the existence of multi-variable link invariants*, Kyungpook Mathematical Journal, 査読有, 2008, Vol. 48, pp. 233-240.
- ② 長郷 文和, 指標代数多様体の断面の既約成分数について, 研究集会『結び目の数学』報告集, 査読無, 2009, pp. 22-28.
- ③ 長郷 文和, 位相幾何学と結び目理論について, 名城大学理工学部研究報告, 査読無, 2009, Vol. 49, pp. 13-19.

- ④ Fumikazu Nagasato, *On a behavior of a slice of the $SL_2(C)$ -character variety of a knot group under the connected sum*, Topology and its Applications, 査読有, Vol. 157, 2010, pp. 182-187.

[学会発表] (計 5 件)

- ① 長郷 文和, 山口 祥司, *On the geometry of a certain slice of the character variety of a knot group*, 日本数学科 2008 年度秋季総合分科会トポロジー分科会, 2008 年 9 月 25 日, 東京工業大学.
- ② 長郷 文和, 指標代数多様体の断面の既約成分数について, 研究集会『結び目の数学』, 2008 年 12 月 23 日, 東京女子大学.
- ③ Fumikazu Nagasato, *On the number of irreducible components of a slice of the character variety*, 国際研究集会『Knots in Washington XXVII』, 2009 年 1 月 11 日, George Washington University, USA.
- ④ 長郷 文和, 田中 心, *A slice of the character variety, knot contact homology and Khovanov homology of 2-bridge knots*, 研究集会『Winter Workshop 2009 on Low-Dimensional Topology and its Ramifications』, 2009 年 3 月 6 日, 名城大学.
- ⑤ Fumikazu Nagasato, *On a topological aspect of the Chebyshev polynomials and the character varieties*, 国際研究集会『The sixth East Asian School of Knots and Related topics』, 2010 年 1 月 27 日, Chern Institute of Mathematics, China.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

長郷 文和 (NAGASATO FUMIKAZU)

名城大学・理工学部・助教

研究者番号：30513634

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：