様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 22 年 3 月 31 日現在

研究種目：若手研究(スタートアップ)
研究期間：2008～2009
課題番号：20840040
研究課題名（和文）　構成可能関数の超局所解析とその特異点理論への応用

研究課題名（英文）　Microlocal analysis of constructible functions and their applications to singularity theory

研究代表者　松井　優 (MATSUI YUTAKA)
近畿大学・理工学部・講師
研究者番号：10510026

研究成果の概要（和文）：構成可能層の近傍サイクル関手を用いて，ミルナーファイバーのヴァーチェンコ型モノドロミーゼータ関数やジョルダン標準形に関する研究を行った．非退化性の仮定の下で，従来の設定を拡張し，アフィントーリック多様体上の関数のミルナーファイバーのモノドロミーゼータ関数や無限遠点周りのモノドロミーゼータ関数について，ニュートン多面体の組み合わせを用いた類似の計算公式を得た．これらをトーリック多様体のオイラー障害の計算公式や判別式集合の次数公式へ応用した．

研究成果の概要（英文）：We studied monodromy zeta functions of Milnor fibers of Varchenko type and Jordan normal forms of monodromy of Milnor fibers by using the nearby cycle functor of constructible sheaves. For non-degenerate polynomials on affine toric varieties, we obtained similar results to classical ones. We also studied Euler obstructions of toric varieties and degree formulas for A-discriminats as applications of our results and monodromy at infinity.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2008 年度	1,060,000	318,000	1,378,000
2009 年度	960,000	288,000	1,248,000
年度			
年度			
年度			
総　計	2,020,000	606,000	2,626,000

研究分野：代数解析学
科研費の分科・細目：数物系科学・基礎解析学
キーワード：構成可能関数，近傍サイクル関手，ミルナーファイバー

１．研究開始当初の背景

本研究は，それまで研究代表者が進めてきた研究である，構成可能層の超局所解析理論を応用して結果が得られていた，位相的ラドン変換と双対多様体の次数公式，群作用をもつ構成可能層のレフシェッツ型不動点定理の研究を背景としている．構成可能関数とは，構成可能層のオイラーポアンカレ標数をと

ることで得られる代数的な関数である．研究代表者は，この構成可能関数の幾何学的積分変換，すなわちオイラー数を測度する積分論での積分変換，について，組み合わせ的手法や超局所解析的な手法を用いて研究を行ってきた．このような積分変換を，代数幾何学の古典的な問題である双対多様体の次数公式などへの応用も研究してきた．これまでの研究で，通常の解析学における超局所解析的手法の有効性と同様に，代数的な関数である構成可能関数に対する超局所解析的手法の有効性が次第に明らかになってきた．そこで，この点についてさらなる研究を行うことで位相的ラドン変換やその応用のより深い性質を見出すことができると期待される．一方で，構成可能層とその群作用の組に対してレフシェッツサイクルという超局所解析的対象を導入し，その関手性やレフシェッツ型不動点定理についての研究も行ってきた．これは構成可能層の特性サイクルの理論の一般化にあたる．また，構成可能関数は整数値であるが，このレフシェッツサイクルにより複素数値構成可能関数と対応する．係数を拡大して構成可能関数の理論を構築することも視野に入れている．本研究では，このような構成可能関数の超局所解析的な手法を整備，拡張するとともに，これらの研究における未解決問題に取り組み新しい手法を開発し，関連する特異点理論の諸問題へ応用することを目指した．

２．研究の目的
本研究は，構成可能関数の超局所解析的性質を明らかにし，その特異点理論や代数幾何への応用を目指すことを目的とした．第 1 に，構成可能関数の超局所解析的操作に対する理論整備を行うことを目的とした．これは近傍サイクルや消滅サイクル，その超局所解析対象である特殊化や超局所化といった操作と様々な幾何学的な不変量の関係を見出すことを目指したものである．第 2 に，構成可能層とその群作用の組に対して新しく導入したレフシェッツサイクルの関手性について研究することを目的とした．これは複素数値構成可能関数の超局所解析的操作の研究とも関係している．特にレフシェッツ型不動点定理への応用に関しては，それまでの研究では不動点集合がコンパクトとは限らない場合や，重複度が 1 とは限らない場合，本質的に特異性を持つ場合などが未解決であり，それらの解決を目指した．そのために一般論のみではなく，グラスマン多様体やトーリック多様体などの具体的対象を取り扱うことでその現象の発見や解析を行うことも目的とした．第 3 に，構成可能関数の超局所解析的理論の特異点理論への応用を目指した．特に，すでに関連が明らかになっている射影双対性について，グラスマン多様体やトーリック多様体など具体的対象について考察を深めていくことを目指した．

３．研究の方法
本研究では，多項式の定める局所的なミルナーファイバーや大域的なファイバーの特異点の様子を具体的に調べる必要がある．計算機を利用した具体的な現象の発見，解析を中心とした研究と，超局所解析的手法を中心としたそれらの理論的解明および双対多様体などの特異点理論への応用を中心とした研究を平行して進めた．

４．研究成果
本研究では，近傍サイクル関手を中心とした構成可能層の理論を用いたミルナーファイバーのヴァーチェンコ型モノドロミーゼータ関数の研究を行った．1 つの多項式に付随するミルナーファイバーはこの零点集合である超曲面の特異ファイバーに近接するなめらかな局所的なファイバーであり，モノドロミーと呼ばれる自己同型を持ち，特異ファイバーの性質を解析するのに重要な対象である．モノドロミーゼータ関数は，この自己同型がミルナーファイバーのコホモロジーに誘導する写像の特性多項式の次数に関する交代積を用いて定義される．これは，特に各コホモロジーに作用するモノドロミーの固有値の情報を持っており，特異点が孤立特異点である場合にはミルナーファイバーのコホモロジーの消滅定理により特定の次数のコホモロジーへのモノドロミーの作用の固有値のみを考察することができる．このような超曲面の特異点におけるミルナーファイバーのモノドロミーゼータ関数および完全交叉多様体の主モノドロミーゼータ関数の計算は，多項式がニュートン非退化と呼ばれる仮定の下で，トーリック特異点解消理論を用いてヴァーチェンコ，岡らにより研究されていた．ニュートン非退化性は，多項式をそのニュートン多面体の各面に対して制限したときに，それがトーラス内に特異点を持たないという条件であり，これは一般的な多項式に対して成り立つ条件である．ヴァーチェンコ，岡の結果は，モノドロミーゼータ関数を与えられた多項式のニュートン多面体の面の格子距離や正規化体積などの組み合わせ的量を用いて記述される．ミルナーファイバーは特異ファイバーに近接するなめらかな局所ファイバーであり，そのコホモロジーは定数層の多項式による近傍サイクル関手を用いて関手的に考察することができる．本研究では，構成可能層の近傍サイクル関手

の関手性を利用し，ヴァーチェンコ，岡の結果を一般のアフィントーリック多様体上の多項式による超曲面のミルナーモノドロミーゼータ関数や完全交叉多様体主モノドロミーゼータ関数の場合に拡張した．結果は従来の結果に類似しており，アフィントーリック多様体を構成する凸錐内に取り扱う多項式の適切なニュートン多面体を定義することで，非退化な多項式に対して，モノドロミーゼータ関数は定義多項式のニュートン多面体の各面の格子距離や正規化体積を用いて記述されることが明らかになった．また，トーリック多様体上のトーラス作用に関して不変な構成可能層を考えたとき，ミルナーファイバーのこの層を係数としたコホモロジーのモノドロミーゼータ関数の計算公式も得られた．このようなモノドロミーゼータ関数はモノドロミーの半単純部分の情報を持っているが，本研究ではさらに，ミルナーファイバーのモノドロミー作用の冪零部分についても研究を行った．ダニロフ・コバンスキーによるトーラス内の非退化なローラン多項式により定義される超曲面の混合ホッジ数を定義ローラン多項式のニュートン多角形の組み合わせ的量により記述する結果を，トーラス作用を持つ非退化ローラン多項式により定義される超曲面の混合ホッジ数のトーラス作用が各次数のコホモロジーに誘導する線形写像の各固有値の固有空間における寄与を記述するものに精密化し，ドネフ・ロゼールによるモチビックミルナーファイバー理論と組み合わせて，非退化な多項式により定義される超曲面が孤立特異点を持つ場合に，ミルナーファイバーのホッジ実現を定義多項式のニュートン多面体の格子距離や正規化体積などの組み合わせ的量を用いて記述する公式を得た．これは，ミルナーファイバーのモノドロミー作用素がコホモロジーに誘導する線形写像のジョルダン標準形を決定するものであり，ジョルダン細胞の各サイズの個数を多項式のニュートン多面体の組み合わせ的量により記述する公式である．結果は固有値により異なる．固有値が1以外の場合には，最大サイズのジョルダン細胞の個数はニュートン多面体の固有値により分類された0次元面の個数によって与えられ，それより1小さいサイズのジョルダン細胞の個数はニュートン多面体の1次元面に対して定義される固有値により分類された格子点の個数により与えられる．固有値が1の場合には，最大サイズのジョルダン細胞の個数はニュートン多面体の1スケルトン上の格子点の個数で与えられ，それより1小さいサイズのジョルダン細胞の個数はニュートン多面体の2次元面内の格子点の個数で与えられる．このように，結果はそれまでに知られていたジョルダン標準形を記述する公式より簡単で計算しやすいものである．本研究では，これまでに述べた局所的な多項式のファイバーに付随するモノドロミーに関する研究だけではなく，大域的な逆像に付随するモノドロミーについても研究を行った．多項式による写像は値域の有限個の点を除いて局所自明束となることがわかっており，この有限個の点をすべて内側に含むような非常に大きな円に沿って大域逆像を平行移動することにより，ミルナーファイバーのモノドロミーと同様にモノドロミー作用を得ることができる．これは無限周りのモノドロミーと呼ばれており，局所的なモノドロミーと同様にしてモノドロミーゼータ関数などが定義される．この無限周りのモノドロミーのモノドロミーゼータ関数の計算にもさまざまな研究があるが，本研究では無限周りのニュートン多面体について非退化な多項式の無限周りのモノドロミーゼータ関数をニュートン多面体の格子距離や正規化体積により記述するヴァーチェンコ型の公式を与えたリブゴベール・スペーバーの結果の近傍サイクル関手の関手性と不確定点解消を組み合わせた再証明を考察した．これにより局所的な場合と同様に完全交叉多様体の無限周りの主モノドロミーゼータ関数についても同様のヴァーチェンコ型の公式が得られることが明らかになった．また，この無限周りのモノドロミーについても半単純部分だけでなく冪零部分の考察も行った．コンビニエントで無限遠で非退化な多項式はコホモロジカルテイム呼ばれる無限遠での特異点が解析しやすい状況にある．これを利用し，ドネフ・ロゼールの理論と同様に無限周りのモチビックミルナーファイバーを導入し，上記の仮定の下で，このホッジ実現および無限周りのモノドロミーのジョルダン細胞の各サイズの個数を定義多項式の無限周りのニュートン多面体の格子距離や正規化体積などの組み合わせ的量を用いて記述する公式を得た．特に，これまでの仮定の下で，局所的なミルナーファイバーのモノドロミーと大域的な無限周りのモノドロミーのすべての次数の混合ホッジ数，およびジョルダン標準形のニュートン多面体を用いた組み合わせ的な構造の決定，の間にはある種の類似性が成り立つことが明らかになった．これはそれまで2次元の場合に知られていた事実の一般化であると考えられる．また，本研究では得られた結果の特異点理論への応用をも考察した．特異点をもつ代数多様体に対してその特異性を測る構成可能関数であるオイラー障害の計算は，特異点理論において重要な問題である．本研究では近傍サイクル関手の考察を用いて格子点配置に付随する射影トーリック多様体のオイラー障害をその点配置の組み合わせ的な量で記述する公式を得

た．これにより，さまざまな応用が得られる．A 判別式集合と呼ばれる射影トーリック多様体の双対多様体の余次元および次数を点配置 A の組み合わせ的量で表す公式を得た．これは従来の A 判別式集合の次数公式よりも簡明な公式である．また，格子点配置に付随する GKZ 型 A 超幾何微分方程式と呼ばれる無限生成のホロノミックな偏微分方程式系の特性多様体は点配置の定めるトーリック多様体の双対多様体の言葉を用いて記述されることが知られているが，この重複度も込めた拡張である特性サイクルを点配置 A の組み合わせ的量で表す公式を得た．このような格子点配置とそれに付随したトーリック多様体の不変量の間に成り立つ関係や性質についての考察を発展させるために，計算機によるプログラムを改良および作成し，さまざまな具体例の数値的な実験，実証を行った．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① Yutaka MATSUI and Kiyoshi TAKEUCHI, A-discriminants and Euler obstructions of toric varieties, RIMS Kokyuroku Bessatsu B10, Differential Equations and Exact WKB Analysis, 査読有, 2008, 149-165.

② Yutaka MATSUI and Kiyoshi TAKEUCHI, Microlocal study of Lefschetz fixed-point formulas for higher dimensional fixed point sets, International Mathematical Research Notices, 査読有, 2010, 882-913.

③ Yutaka MATSUI and Kiyoshi TAKEUCHI, Monodromy zeta functions at infinity, Newton polyhedral and constructible sheaves, Mathematische Zeitschrift, 査読有, 2010, 出版予定.

〔学会発表〕（計３件）

① Yutaka MATSUI, Topological Radon transforms and their applications to A-discriminants, Geometry and analysis on complex algebraic varieties, 2008.9.24, Independent university of Moscow (Russia).

② Yutaka MATSUI, A-discriminants, GKZ hypergeometric functions and monodromy zeta functions of Milnor fibrations, 微分方程式のモノドロミーをめぐる諸問題, 2009.2.5, 京都大学.

③ Yutaka MATSUI, A-discriminants and monodromies of Milnor fibrations, Microlocal analysis and related topics, 2010.3.1, 日本大学.

６．研究組織

(1) 研究代表者

松井 優（MATSUI YUTAKA）
近畿大学・理工学部・講師
研究者番号： 10510026