

令和 6 年 6 月 4 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2020～2023

課題番号：20H01793

研究課題名（和文） $p$ 進体上の $p$ 進ガロア表現と $p$ 進エタール局所系の研究研究課題名（英文）Study on  $p$ -adic Galois representations and  $p$ -adic étale local systems over a  $p$ -adic field

研究代表者

辻 雄 (Tsuji, Takeshi)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：40252530

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 5,900,000円

研究成果の概要（和文）： $p$ 進Simpson対応，整 $p$ 進Hodge理論，prismaticコホモロジーと $q$ -Higgs場，およびLubin-Tate拡大の多変数局所岩澤理論について研究した．整 $p$ 進Simpson対応におけるコホモロジーの大域的比較， $p$ 進Simpson対応の関手性，係数付きAinfコホモロジーとprismaticコホモロジーの比較，prismatic crystalとそのコホモロジーの $q$ -Higgs加群を用いた記述， $p$ 進表現のLubin-Tate岩澤加群のLubin-Tate  $(\varphi, \Gamma)$ 加群による表示の，Lubin-Tate一般化Coleman級数による新構成などの結果を得た．

研究成果の学術的意義や社会的意義

数体上の代数多様体のエタールコホモロジーとして得られるガロア表現は，数論幾何学の研究における基本的な道具の一つとなっている． $p$ 進Hodge理論は，微分形式や微分方程式を用いて，ガロア表現から数論的情報を取り出す有効な手段となっている．本研究では，応用上重要な整コホモロジーの係数理論の基礎（具体的記述やコホモロジーの比較）や，非アーベル $p$ 進Hodge理論（ $p$ 進Simpson対応）の代数多様体の間の写像に関するふるまいなどについての成果を得た．

研究成果の概要（英文）：We studied  $p$ -adic Simpson correspondence, integral  $p$ -adic Hodge theory, prismatic cohomology via  $q$ -Higgs fields, and multivariable local Iwasawa theory for Lubin-Tate extensions. We obtained a global comparison of cohomologies in integral  $p$ -adic Simpson correspondence, a functoriality in  $p$ -adic Simpson correspondence, a comparison between Ainf cohomology and prismatic cohomology with coefficients, a description of a prismatic crystal and its cohomology in terms of  $q$ -Higgs modules, and a new construction of the description of the Lubin-Tate Iwasawa module of a  $p$ -adic representation in terms of the Lubin-Tate  $(\varphi, \Gamma)$ -module, via Lubin-Tate generalized Coleman power series.

研究分野：数論幾何学

キーワード： $p$ 進Hodge理論  $p$ 進Simpson対応 prismaticコホモロジー  $q$ 接続 整 $p$ 進Hodge理論

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

#### (1) p 進 Simpson 対応

有理係数での small 一般化表現と small Higgs 束のコホモロジーの比較同型は得られていたが、そこで用いる Poincare の補題の一種が有理係数でのみ成り立つことから、整係数で類似の手法は使えない。一方 Morrow 氏との  $A_{\text{inf}}$  コホモロジーの係数理論の研究の過程で、局所的には座標を用いて自然な比較同型が作れることが明らかになっており、その大域化の障害を解明することが課題となっていた。また p 進 Simpson 対応の smooth 固有高次順像についての関手性に関して、Abbes 氏と Gros 氏が、その基礎となる relative Faltings site を導入し、また relative p 進 étale コホモロジーと relative Faltings コホモロジーの比較定理の証明 (Faltings が非常に短く証明の概略を与えていた) の詳細を書き終えていた。彼らは p 進 Simpson 対応の smooth 固有高次順像との両立性を次のテーマとして研究を進めていた。

#### (2) 整 p 進 Hodge 理論

Morrow 氏との  $A_{\text{inf}}$  コホモロジーの係数理論の研究により、relative BKF 加群を導入し、その étale, crystalline, de Rham 実現とコホモロジーの比較がなされていた。また本研究の始まる前年の 5 月に定数係数の  $A_{\text{inf}}$  コホモロジーを特別な場合として含む新しいコホモロジー: prismatic コホモロジーの論文が Bhatt と Scholze により Arxiv に公開された。prismatic コホモロジーは自然な係数理論を持つ。局所的には、relative BKF 加群の圏と  $A_{\text{inf}}$  を基底 prism とする局所有限型自由な prismatic クリスタルの圏が圏同値となることを、可積分 q 接続付き加群を経由して、Morrow 氏との共同研究により証明していた。大域的な圏同値の構成と両者のコホモロジーの比較が基本的な問題として残されていた。

#### (3) prismatic コホモロジーと q Higgs 場 (p 接続の q 変形)

Bhatt と Scholze の論文では定数係数の q-crystalline コホモロジーが局所的に q-de Rham 複体で表されること、また定数係数の q-crystalline コホモロジーが関連する q-prismatic cohomology と同型になることが示されていた。一方 Morrow 氏との共同研究により、Frobenius 構造付き可積分 q 接続付き加群の圏が、relative Frobenius に沿う降下により、Frobenius 構造付き q-Higgs 加群の圏と圏同値になることを示していた。このことから  $A_{\text{inf}}$  を基底 prism、あるいはより一般に q-crystalline prism  $\mathbb{Z}_p[[q-1]]$  上の有界 prism を基底とする場合に、q-Higgs 場を用いて prismatic crystal やそのコホモロジーを記述することが基本的な問題となっていた。

#### (4) Lubin-Tate 拡大の多変数局所岩澤理論

Laurent Berger 氏との共同研究により、Lubin-Tate ( , ) 加群の Lubin-Tate 形式群の局所モジュライ空間への持ち上げの構成、および Schneider-Venjakob による Lubin-Tate 岩澤加群の Lubin-Tate ( , ) 加群による記述の局所モジュライ空間への持ち上げを得ていた。さらに F 解析的表現で Hodge filtration の幅が p より小さい場合に、Lubin-Tate ( , ) 加群の格子である Wach 加群の局所モジュライ空間への持ち上げを構成し、多変数明示的相互律の定式化 (予想) を得ていた。Schneider-Venjakob の記述の構成は双対を 2 度用いる間接的方法でなされており、この構成法の局所モジュライ空間への持ち上げに困難があった。

### 2. 研究の目的

B. Bhatt, M. Morrow, P. Scholze による新しい整 p 進 Hodge 理論の定式化 ( $A_{\text{inf}}$  コホモロジー) における係数理論: relative BKF 加群を、プロエタール局所自由  $A_{\text{inf}}$  層を用いて Morrow と共同で構築した。本研究では、この  $A_{\text{inf}}$  係数理論と既存の理論との関係を明らかにするとともに、Bhatt-Scholze のプリズム理論との関係を、特に relative BKF 加群の局所的記述で用いた可積分 q 接続、q-Higgs 場の視点から研究する。また p 進 Simpson 対応において残されている整 p 進 Simpson 対応とコホモロジーの両立性や関手性、p 進ガロア表現の多変数 Lubin-Tate 局所岩澤理論の Lubin-Tate ( , ) 加群の局所モジュライ空間への持ち上げを用いた研究を行う。

### 3. 研究の方法

#### (1) p 進 Simpson 対応

整局所 p 進 Simpson 対応では small 一般化表現と small 整 Higgs 束が対応する。Morrow 氏との整 p 進 Hodge 理論の係数理論の研究により、前者のガロア・コホモロジーに Bhatt-Morrow-Scholze の整 p 進 Hodge 理論で導入された「ずらし操作」を施すと、整構造を保つ自然なコホモロジー比較同型があることが証明されていた。同型の構成は座標に依存しており、明示的なホモトピーを用いて座標の取り方によらないことが示されていた。これを貼り合わせて大域的に small 一般化表現と small 整 Higgs 束のコホモロジーを比較するために、開被覆上の各座標の間の変換に伴うホモトピーを貼り合わせる高次ホモトピーを整構造を保ちつつ構成する。その

過程で Higgs 場に課される条件を明らかにする。

研究代表者の  $p$  進 Simpson 対応の定式化では, small Higgs 束のかわりに Higgs crystal を導入することにより, 考えている代数多様体の第一無限小変形の存在・選択を回避している。Abbes 氏と Gros 氏との  $p$  進 Simpson 対応の関手性についての共同研究においては, Higgs crystal の視点を導入することにより, 彼らが証明した  $p$  進 Simpson 対応の smooth 固有高次順像についての関手性を, 代数多様体の第一無限小変形への射の大域的持ち上げの存在を仮定しない, より一般的かつ洗練された形で与える。

#### (2) 整 $p$ 進 Hodge 理論

研究代表者による相対 Fontaine-Laffaille 加群 (ある種の Frobenius, filtration 付きの crystals) から  $A_{\text{inf}}$  コホモロジー係数への関手の構成法の, Frobenius 付き prismatic crystal での類似を考えることにより, Morrow 氏との共同研究で導入した相対 BKF 加群の圏と prismatic crystal の圏の間の大域的な圏同値を示す。関手を構成したのち, 圏同値の証明はすでに共同研究で得られていた可積分  $q$  接続付き加群を通した両圏の局所的比較を用いる。上記の相対 Fontaine-Laffaille 加群の研究で用いた  $A_{\text{inf}}$  コホモロジー係数の Frobenius と Acrys 上のクリスタルの filtration を結びつける手法を用いて 相対 BKF 加群に伴う幾何的基本群の表現の「幾何的 crystalline 性」を調べる。

#### (3) prismatic コホモロジーと $q$ Higgs 場 ( $p$ 接続の $q$ 変形)

Morrow 氏との共同研究により, smooth affine 形式スキームの  $A_{\text{inf}}$  を基底とする局所有限型自由 prismatic crystal の可積分  $q$  接続および  $q$  Higgs 場を用いた記述を得ていた。この構成は群  $(\mathbb{Z}_p)^d$  の作用の「 $q$  偏微分」を用いるが,  $q-1$  が非零因子の場合にしか用いることができない。crystal と可積分接続を Taylor 級数を用いて結びつける従来の crystalline コホモロジー論の方法の  $q$  類似もあるが, Leibnitz 則が捻られているために Taylor 級数の類似の扱いが難しい。Morrow 氏との共同研究で構築した手法を援用できる形で, 群  $(\mathbb{Z}_p)^d$  作用を経由しない  $q$  偏微分の基礎理論を構築することにより, 上記の結果を  $q$ -crystalline prism 上で定義された一般の基底 prism で, 局所有限型自由とは限らない一般のクリスタルへ拡張する。

#### (4) Lubin-Tate 拡大の多変数局所岩澤理論

研究代表者が以前 Lubin-Tate 指標の冪に対して証明した多変数明示的相互律では, Coleman 級数が自然に Lubin-Tate 形式群の局所モジュライ空間に持ち上がるのが鍵となっていた。Schneider-Venjakob による  $p$  進表現に伴う Lubin-Tate 岩澤加群の Lubin-Tate ( , ) 加群を用いた記述に対して, 上記の先行結果の自然な拡張を行えるような別構成を与えることにより,  $p$  進表現の Lubin-Tate 多変数明示的相互律の証明への足がかりを構築する。

### 4. 研究成果

#### (1) $p$ 進 Simpson 対応

##### 整コホモロジーの比較定理の証明

Morrow 氏との共同研究より, 局所的には, Faltings の整  $p$  進 Simpson 対応よりも条件を緩めて一般化表現が Higgs 束に降下することが明らかになっていた。この局所的観察に対して, Bhatt-Scholze の Hodge-Tate prismatic crystal と pro-étale site 上のベクトル束の対応として大域的な意味づけを与えた。

整局所  $p$  進 Simpson 対応では small 整一般化表現と small 整 Higgs 束が対応する。Morrow 氏との整  $p$  進 Hodge 理論の係数理論の研究により, 前者のガロア・コホモロジーに Bhatt-Morrow-Scholze の整  $p$  進 Hodge 理論で導入された「ずらし操作」を施すと, 整構造を保つ自然なコホモロジー比較同型があることが証明されていた。この同型の大域化は一般には存在せず, その障害の解明が課題となっていた。素数  $p$  に比べ小さい次数をもつコホモロジーについては, Higgs 場のある種の  $p$  進収束性の仮定のもと, 大域的な比較同型が成り立つことを証明した。

##### 局所 $p$ 進 Simpson 対応の関手性の研究

Abbes 氏と Gros 氏は, 代数多様体の第一無限小変形への射の大域的持ち上げの存在のもとで,  $p$  進 Simpson 対応の関手性を示していたが, 研究代表者による Higgs crystal を用いた別のアプローチの視点から射の持ち上げを用いない簡明な定式化のアイデアを得, Abbes 氏と Gros 氏と共同研究を行った。局所  $p$  進 Simpson 対応の逆像, 順像についての関手性の射の持ち上げを用いない定式化を得た。 $p$  進 Simpson 対応の固有滑らかな射による高次順像についての関手性の定式化においては, Higgs 束の相対高次コホモロジーを, 射の大域的持ち上げの障害に関連した torsor を用いて適切に捻る必要がある。その定式化を与えると同時に, 相対高次コホモロジー上の Higgs 場を Abbes-Gros の先行研究よりも簡明な扱いやすい形で与えた。共同研究では,  $p$  進周期環を用いた  $p$  進 Simpson 対応の構成を用いているが, Hitchin fibration と指数写像を用いた別のアプローチも知られている。 $p$  進周期環のある種の双対に自然に普遍的な指数写像が現れ, この観察を通して二つのアプローチが関連づけられることを明らかにした。

## (2) 整 $p$ 進 Hodge 理論

相対 BKF 加群の圏と prismatic crystal の圏の大域的同値

Morrow 氏との共同研究で表現論的な視点から導入した相対 BKF 加群と Bhatt-Scholze が導入した prismatic cohomology の自然な係数 prismatic crystal がある。Frobenius 構造付きでは、両者が大域的にも圏同値であることを 2021 年度に改定した共著論文で証明した (M. Morrow, T. Tsuji, Generalised representations as  $q$ -connections in integral  $p$ -adic Hodge theory, arXiv:2010.04059)。

相対 BKF 加群に伴う幾何的基本群の表現の幾何的 crystalline 性

Morrow 氏との共著論文 2021 年度改訂版において、局所的には、相対 BKF 加群に伴う幾何的基本群の表現はすべて「幾何的 crystalline」(Acryls 上の filtration 付き F-crystal に忠実充満に対応する表現)であることを示した。

## (3) prismatic コホモロジーと $q$ Higgs 場 ( $p$ 接続の $q$ 変形)

$q$ -crystalline prism 上での prismatic crystal と  $q$ -Higgs 加群

環上で 構造と両立する  $q$  微分概念を新たに導入することにより、 $q-1$  が非零因子の仮定なしで  $q$  接続、 $q$ -Higgs 場を扱う一般的な手法を構築し、Poincare の補題を証明した。これらを用いて、基底 prism が  $q$ -crystalline prism 上で定義されている場合に、prismatic crystal とそのコホモロジーの、bounded prismatic envelope 上の  $q$ -Higgs 加群とその  $q$ -Higgs 複体を用いた記述を与えた。Frobenius 引き戻しや積構造との関係を明確にし、また Zariski cohomological descent を用いた大域的な記述も与えた (T. Tsuji, Prismatic crystals and  $q$ -Higgs fields, arXiv:2403.11676)。

相対 BKF 加群の  $A_{\text{inf}}$  コホモロジーと prismatic cohomology

prismatic crystal とそのコホモロジーを  $q$ -Higgs 加群を用いて記述する一般論の応用として、相対 BKF 加群と  $A_{\text{inf}}$  を基底とする prismatic crystal のコホモロジーの間の比較同型を証明した。

$q$ -crystalline prism 上にない場合の研究

考えている基底やスキームが 1 の原始  $p$  乗根を含む場合に、1 の原始  $p$  乗根を変数  $q$  へ持ち上げ、変数  $q$  についての数論的  $q$ -Higgs 場を加えることにより、prismatic crystal とそのコホモロジーの局所的記述を与えた。絶対 prismatic crystal も扱った。数論的  $q$ -Higgs 微分は幾何的  $q$ -Higgs 微分と可換ではなく、ある種の非可換な  $q$ -Higgs 場があらわれる。 $q$ -crystalline prism 上での手法の非可換版の構築が鍵となった。絶対不分岐な  $p$  進整数環に 1 の原始  $p$  乗根を付加した環上の絶対 prismatic crystal において Gros-Le Stum-Quiros による数論的  $q$ -Higgs 場のみを用いた先行研究があった。

Nygaard filtration の  $q$ -Higgs 加群を用いた記述

基底 prism が  $q$ -crystalline prism 上で定義されている場合に、で構築した理論を用いて、F-prismatic crystal のコホモロジーの Nygaard filtration およびその de Rham 特殊化上の Hodge filtration との関係について、 $q$ -Higgs 加群を用いた具体的記述を与えた。

## (4) Lubin-Tate 拡大の多変数局所岩澤理論

Schneider-Venjakob による  $p$  進表現の Lubin-Tate 岩澤加群の表示の別構成

L. Berger 氏との Lubin-Tate ( , ) 加群の共同研究において、Hodge filtration の長さが  $p$  より小さい F 解析的 crystalline 表現の多変数明示的相互律の Lubin-Tate 形式群の局所モジュライ空間を用いた定式化(予想)が得られていた。この定式化で用いた岩澤加群の Lubin-Tate( , ) 加群による記述 (Schneider-Venjakob) が、双対を 2 回用いる間接的な方法で得られている点が、予想の証明の障害となっていた。この記述について、直接的な別構成を与えた。

Lubin-Tate 一般化 Coleman 級数と明示的相互律の証明

Schneider-Venjakob の同型の新構成の過程で、Colmez の円分一般化 Coleman 級数の Lubin-Tate 類似を得ていた。この Lubin-Tate 一般化 Coleman 級数についての一変数明示的相互律を証明した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 6件 / うち国際学会 5件）

1. 発表者名 辻雄
2. 発表標題 Generalized Coleman power series and Iwasawa cohomology for Lubin-Tate extensions
3. 学会等名 Around $p$ -adic cohomologies (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 辻雄
2. 発表標題 Integral cohomologies in the $p$ -adic Simpson correspondence
3. 学会等名 Arithmetic Geometry - Takeshi 60 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 辻雄
2. 発表標題 Prismatic cohomology and Ainf-cohomology with coefficients
3. 学会等名 Franco-Asian Summer School on Arithmetic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 辻雄
2. 発表標題 $p$ 進Hodge理論の進展
3. 学会等名 代数的整数論とその周辺 2023 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 辻雄
2. 発表標題 Prismatic cohomology and q-Dolbeault complex
3. 学会等名 p-adic cohomology and arithmetic geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 辻雄
2. 発表標題 Prismatic crystals, q-Higgs modules, and their cohomology
3. 学会等名 Workshop on p-adic Arithmetic Geometry (Spring) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関