

令和 6 年 5 月 30 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2020～2023

課題番号：20H01804

研究課題名(和文)無限次元解析の諸問題と確率解析の研究

研究課題名(英文)Study on stochastic analysis and problems in infinite dimensional analysis

研究代表者

会田 茂樹(Aida, Shigeki)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：90222455

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 5,800,000円

研究成果の概要(和文)：(1) 有界変動な経路依存項を含んだRDE(=ラフパスで駆動される微分方程式)を定式化し、その解の存在、アприオリ評価、サポート定理を確立し、論文として出版した。(2) 永沼氏と共同で取り組んできたハースト指数 $H(1/3 < H < 1/2)$ の非整数ブラウン運動で駆動されるRDEの近似誤差過程の漸近極限確率過程決定の研究をまとめた。(3) コンパクトリー群上のpinned path spaceの部分領域のディリクレ境界条件のOrnstein-Uhlenbeck(=OU)作用素を考え、その作用素のスペクトルの準古典極限をpathのエネルギー関数のヘッシアンを用いて決定した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

(1) これまでのRDEやその拡張に当たる正則構造理論では取り扱うことができなかった経路依存項を含んだRDEを定式化し、解の存在やアприオリ評価を示したことにより、部分的であるが、反射壁SDEや最大・最小過程を含んだよく知られたSDEへのラフパスによる応用が可能になったのは学術的な意義がある。(2) 先行研究では、近似誤差の弱収束のみを論じていたが、本研究では、剰余項の L^p ノルムの評価を与えている点で進んだ結果になっている。(3) 無限次元では、最小固有値と第2固有値の漸近挙動の研究が主であったが、本研究では、それ以外の固有値の漸近挙動を決定している点が新しい点である。

研究成果の概要(英文)：(1) We introduce a class of rough differential equations containing path-dependent bounded variation terms and prove the existence of solutions, a priori estimate of solutions, and support theorems. (2) We study asymptotic error distribution process of RDEs driven by fractional Brownian motion with the Hurst parameter $H(1/3 < H < 1/2)$ for several approximation schemes. This is a joint work with Nobuaki Naganuma and we are preparing the manuscript. (3) We determine the semiclassical limit of the spectrum of Ornstein-Uhlenbeck operator with the Dirichlet boundary condition on a domain of the pinned path space of the compact Lie group by using the information of the hessian of the energy function of the path. This is an infinite dimensional analogue of finite dimensional result. We are preparing the manuscript.

研究分野：確率論

キーワード：確率微分方程式 ラフパス 無限次元解析 対数ソボレフ不等式 漸近誤差分布 反射壁確率過程

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

確率論において現れる確率変数は基本的な確率過程(ノイズ)の汎関数として現れることが多い。例えば、マルチンゲールによる確率積分で定義される確率微分方程式 (=SDE)やラフパス解析で定まる RDE(=ラフ微分方程式)の解は、典型的な物である。これらの解析の数学的基礎研究を進めるとともに、その応用として、未解明である次の分野の研究を考えた。

- (1) 反射壁確率過程を含むような経路依存方程式のラフパスを用いた解析、
- (2) RDE の解の近似の精密化(精度保証)の意味も込めた漸近誤差分布の解析、
- (3) 無限次元空間上の Ornstein-Uhlenbeck operator(=OU 作用素)のスペクトルの準古典解析。

2024 年度当初の段階で、(1)に関しては、プロトタイプの研究(arXiv にあげた preprint)の修正をしていた段階、(2)に関しては、共同研究者の永沼氏との1次元の場合の結果が出版され、多次元の場合、解の補間の手法を用いた議論を初めた段階、(3)に関しては、自分自身の過去の研究(JFA, 269, no.12, 2015)の回転対称性の条件を落とす試みをしている段階であった。有限次元空間でモース関数 F を指数の肩にあげて得られる確率測度 $e^{-\lambda F}/Z_{\lambda} dx$ で定まるディリクレ形式のスペクトルの $\lambda \rightarrow \infty$ での漸近挙動の研究は、metastability の問題として詳しく研究されて来た。(3)の研究は、無限次元空間のディリクレ形式や確率偏微分方程式の解から定まるマルコフ過程の対応する問題の解析も含む基礎研究である。これは、確率測度の径路積分表示の問題と密接に関係している。

2. 研究の目的

ラフパス解析は、非マルコフ過程の解析の基盤を与える物で、様々な問題が考えられる。

上記(1),(2),(3)を目標としたのは次の理由による。ラフパス解析は、その後 Hairer の正則構造の理論や、Gubinelli らの paracontrolled calculus など特異確率偏微分方程式(=特異 SPDE)の正確な解析が可能な段階に移った。しかし、確率微分方程式では、完全に意味がつかないが、ラフパス解析や、その発展形である正則構造の理論でも扱えていなかったのが、反射壁確率微分方程式であり、関連する経路依存方程式であった。確率偏微分方程式でも反射の効果を含んだ物があり、その扱いは重要だが、正則構造の理論と反射壁 SDE、SPDE に精通している Zambotti 氏もこれらの解析はまだ現状では扱えないと Springer Lecture Note で指摘している。そこで、RDE の範疇でどこまで何がわかるかを明らかにすべく(1)を研究課題とした。

(2)に関しては、1次元の研究を永沼氏と共同で研究しているときから、多次元の場合を目標としていた。この多次元で真にラフパスが必要になる場合(fBm (=非整数ブラウン運動)のハースト指数 H が小さい場合)が興味深いわけだが、その場合は、まだ研究が多くなく、まずは、 $1/3 < H < 1/2$ の場合の漸近誤差決定を目標とした。

(3)については、まずは、自身の論文 JFA, 269, no.12, 2015 の結果を回転対象でない場合に拡張することを目指した。この研究は、有限次元では、多様体上モース関数により定義された Witten ラプラシアン の準古典スペクトル解析と多様体のトポロジーの関係を無限次元の場合(今の場合は道の空間)に拡張することを目指した研究の始まりの部分と言える。

3. 研究の方法

(1)に関しては、まずは、通常の RDE と同じような証明が走る経路依存 RDE の係数の適切な条件を見出すことであった。ただし、その条件は、考えたい方程式が満たすような物でなければならない。

(2)に関しては、すでに考えている解の補間の方法を用いて、永沼氏と共同で研究を進めた。

(3)に関しては、この問題では、作用素のスペクトルの下からの評価を与える対数ソボレフ不等式が解析の鍵になる。考えている空間がリー群上ピン止めされたパス空間の場合は、解析に必要な適切な対数ソボレフ不等式を既に証明していたのでこのことを用いて、解析を進めた。いずれも、コロナ禍後、研究集会で成果を発表し、聴衆からのフィードバックを受けて研究を進めた。

4. 研究成果

研究成果は(1), (2), (3)に対応し3つある。

(1) 2016年から続けてきた有界変動な経路依存項を含んだ RDE の研究を大幅に修正し新たな内容を加えまとめた論文を専門誌に投稿し、2024年3月に(オンラインで)出版された。内容は、反射壁 SDE, 最大値・最小値過程などに依存する1次元 SDE(反射壁項も含み得る)などの多次元版 SDE を含んだ経路依存 RDE を定式化し、その解の存在、アプリオリ評価、

ある種の解の連続性定理、サポート定理を確立したことなどである。

(2) 永沼氏と共同で取り組んできた RDE の近似誤差過程の漸近極限確率過程決定の研究をまとめた。この論文は、解と近似解を補間する解を用いた漸近極限過程の同定の解析とそのためのエルミート変分過程のマリアン解析を用いたモーメント評価(かなり非自明な多次元ヤング積分の評価が必要)の内容として異なる2つのパートからなるため、これらを別々に出版することを考えて準備中である。

(3) コンパクトリー群上の pinned path space の部分領域のディリクレ境界条件の $0U$ 作用素を考え、その作用素のスペクトルの準古典極限を決定した。正確には、極限で、本質的スペクトルになると予想される孤立した可算集合が現れるが、その近傍を除外した集合上では、 $0U$ 作用素のスペクトルは離散スペクトルのみになり、その極限が部分領域に含まれる測地線のエネルギー関数のヘッシアンで定まる近似調和振動子のスペクトルで決定されるという有限次元のアナロジーで予想される結果が得られた。

ステートメントだけを見るとわかりにくいだが、この研究で局所的な近似の段階でラフパス理論を用いていることを注意しておく。この成果は、2023 年の京都での国際研究集会で限定的な結果を講演の中で話し、さらに完全な結果は、2024 年3月の慶応大学での研究集会で発表を行った。論文は現在準備中であり、さらに進んだ場合(微分形式に作用する境界条件付き Witten ラブラシアン)も考察中である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Shigeki Aida and Nobuaki Naganuma	4. 巻 57
2. 論文標題 Error analysis for approximations to one-dimensional SDEs via the perturbation method	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 381, 424
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shigeki Aida	4. 巻 -
2. 論文標題 Rough differential equations containing path-dependent bounded variation terms	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of Theoretical Probability	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10959-024-01319	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 5件 / うち国際学会 4件）

1. 発表者名 Shigeki Aida
2. 発表標題 An approach to asymptotic error distributions of rough differential equations
3. 学会等名 Stochastic analysis and applications, Open Japanese-German conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shigeki Aida
2. 発表標題 An approach to asymptotic error distributions of rough differential equations
3. 学会等名 Stochastic analysis and related fields (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shigeki Aida
2. 発表標題 An approach to asymptotic error distributions of rough differential equations
3. 学会等名 Stochastic Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Shigeki Aida
2. 発表標題 Asymptotics of lowlying Dirichlet eigenvalues of Witten Laplacians on domains in pinned path groups
3. 学会等名 Stochastic Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Shigeki Aida
2. 発表標題 Asymptotics of lowlying Dirichlet eigenvalues of Witten Laplacians on domains in pinned path groups
3. 学会等名 慶応確率論ワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~aida/index-j.html https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~aida/index.html
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------