

令和 6 年 6 月 5 日現在

機関番号：16401

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2023

課題番号：20K02915

研究課題名（和文）数学を洗練する活動を実現するための教材開発ストラテジーの研究

研究課題名（英文）Research on teaching material development strategies to practice the activities of mathematical sophistication

研究代表者

中野 俊幸（NAKANO, Toshiyuki）

高知大学・教育研究部人文社会科学系教育学部門・教授

研究者番号：20284424

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,200,000円

研究成果の概要（和文）：数学授業における数学を洗練する活動を実現するための数学的学習場を教材開発によって形成することを狙いとし、そのための教材開発のストラテジーとしてある変数を連続的に変化させ順序よく並べる、ある条件・性質を否定して変更する、問いと答えを逆転させる、セッティングを変える、図を動かす、範囲の制限をはずす、次元を変えるの7つを同定し、これらのストラテジーを適用して幾何教材を開発し、統合化の発展過程を設定した授業をデザインした。また、「アリスモゴン」と「鏡の本」を教材化して本質的学習場を構成した。開発した授業デザインによる数学授業を小学校と中学校で実践して有効性を検証し、実践事例を提供した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

数学授業で深い学びを実現することが求められているが、本研究は数学学習での深い学びを一般化・抽象化・統合化・記号化・形式化などの「数学を洗練する活動」を生徒の主体的学習に実現することであると捉え、その活動を、一般的な指導法の開発ではなく、数学に固有な教材開発によって本質的学習場を形成することによって実現することを狙いとした。教材開発の7つのストラテジーを同定し、その有用性を実践を通して検証したことは、数学を洗練する活動を実現するための教材開発を広く算数・数学教員が実践することを容易にし、また現職教員の教材開発力を高めることにも役立ち、数学の授業改善につながることを期待できる。

研究成果の概要（英文）：The aim is to form a mathematical learning Environments for realizing activities to vertical mathematization in mathematics classes through the development of teaching materials, and to this end, we identified seven strategies for developing teaching materials: continuously changing certain variables and arranging them in order, negating and changing certain conditions and properties, reversing questions and answers, changing settings, moving diagrams, removing restrictions on range, and changing dimensions. We developed geometry teaching materials by applying these strategies, and designed lessons that set up a developmental process of integration. In addition, "Arithmogons" and "mirror-book" were used as teaching materials to construct Substantial Learning Environments. The effectiveness of the mathematics lessons based on the developed lesson design was verified by practicing them in elementary and junior high schools, and practical examples were provided.

研究分野：数学教育学

キーワード：数学的活動 教材開発のストラテジー 数学授業デザイン 統合化 本質的学習場 アリスモゴン 鏡の本

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

算数・数学の新しい学習指導要領では、数学的に考える資質・能力を、数学的活動を通して育成することを目標とし、「主体的・対話的で深い学び」の実現に向けた授業改善が求められている。算数・数学教師にとって「主体的」「対話的」ということは具体的実践としてイメージされ易いようであるが、「深い学び」とは何かについては具体化の方向性が捉え難いようである。そこで本研究では、数学教育における「深い学び」の本性を、Freudenthal()の教育理論に基づいて「数学化」とであると捉え、児童・生徒による数学化の主体的活動は数学的学習場を与えることによって引き起こすことが有効であると考えた。そして、その学習場は、適切な数学的教材によって構成されるという活動主義的数学教育学研究の一定の帰結に依拠して、教材開発が決定的に重要であると考え、まず、教材開発を効果的に行うための戦略を同定することにした。そして、その戦略を活用して実際に数学教材を開発して数学的学習場をデザインし、その授業を実践することによって効果を実践的に検証する。そのことによって、算数・数学教師に「深い学び」の具体的実践事例を提供することができ、算数・数学の授業改善に資することができると思に至った。

2. 研究の目的

数学教育における深い学びを本研究では数学化を児童・生徒に主体的にさせることであると明確に規定し、数学化のための学習場の形成を、一般的な指導法の開発ではなく、数学に固有な教材開発によってもたらすことを狙いとしている。数学学習の場合、教材は単に題材だけではなく、「問い」や指導方法も内在しており、教材開発には必然的に指導法の開発が内包されている。数学化を行う学習場を形成するための教材を開発するにあたり、教材の開発に有効な戦略を同定し、改善することが本研究の目的の一つである。さらに、その戦略を使って、数学化の授業を実際に行い、数学化の実践事例を提供することが本研究の目的である。

3. 研究の方法

(1) 教材開発の戦略の同定

Fielker()の示している7つの教材開発の戦略：オープン性(Openness)、不正確さ(Imprecision)、制限(Limitation)、完全性(Completeness)、逆転(Reversal)、深さ(Depth)、変数(Variables)や、Walter & Brown()のWhat-If-Not戦略、Musser, Burger & Peterson()の「推測と試行(Guess and Test)」戦略：好き勝手にやってみる(Random Guess and Test)、順序立ててやってみる(Systematic Guess and Test)、筋道立ててやってみる(Inferential Guess and Test)を参考にし、また、近年のパソコンの幾何ソフトの活用も考慮して、以下の教材開発の7つの戦略を同定した。

- ある変数を一定に変化させ順序よく並べる…逐次的変化と共変性・不変性への着目
- ある条件・性質を否定して変更する…What-If-Not戦略
- 問いと答えを逆転させる…逆・裏の命題、十分性を考える
- セッティングを変える…表現方法は思考の場である
- 図を動かす…図形の連続的変化と共変性・不変性への着目
- 範囲の制限をはずす…物理的・時間的制約を超える
- 次元を変える…平面から空間に、変数を増やす

(2) 半円の分割問題からの教材化によるWhat-If-Not戦略とZ.P.D理論を統合する授業デザイン

中学校3年生の「多項式」の単元の教科書に記載されている半円の分割の問題に対し、戦略「ある条件・性質を否定して変更する(What-If-Not戦略)」を適用して教材開発し、Z.P.D理論の外的支援の考えと統合した授業デザインを構成した(図1)。

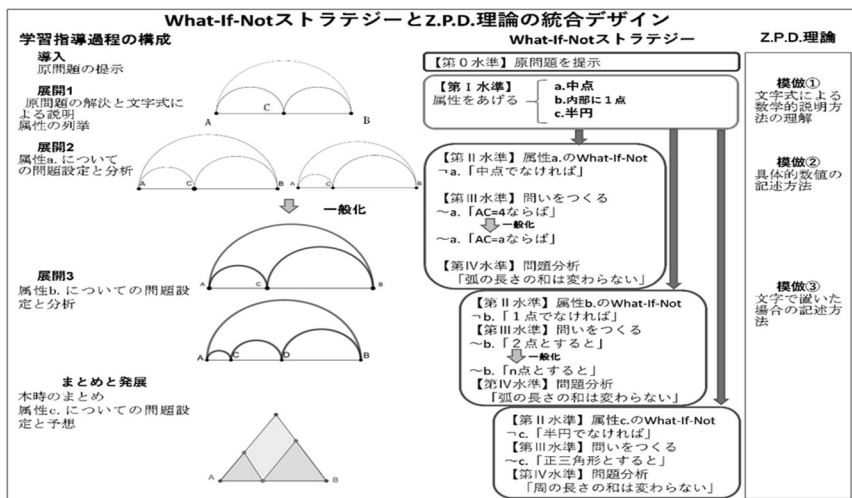


図1 What-If-Not戦略とZ.P.D理論を統合する授業デザイン

(3) 図形描画ソフトを活用した星形正多角形の教材化による数学的統合化の授業デザイン
 PC ディスプレイ上において、キャラクターが進む距離や曲がる角度を入力してプログラムを組み、キャラクターを動かしてその軌跡として図形を描いていくプログラミングソフト「プログラム」() を利用し、星形多角形を作図する教材を教材開発のストラテジーを活用して開発した。その教材による統合化の活動をデザインしたが、その統合化を次の4つに分類し、それが発展的に進む学習過程として、図2のような授業をデザインした。

- 【一般化による統合】
別のものと捉えていた個々の事象を共通する性質で1つにまとめる
- 【拡張化による統合】
対象を拡張し性質を発展させてきた複数の考えを1つの考えに含ませる
- 【完化による統合】
ある考えを補完して全体をまとめる
- 【組織化による統合】
複数の考えを体系にまとめる

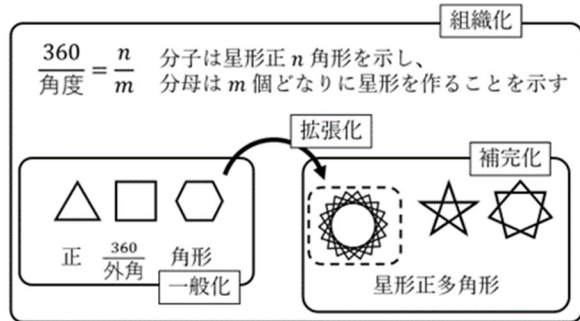


図2 星形正多角形における統合化の授業デザイン

(4) アリスモゴンの教材化による本質的学習場の構成

McIntosh & Quadling()が提案したアリスモゴンは、図3で「 n にあてはまる数は、その両隣の中にある数の和となる」という規則になっている。Wittmann()は、アリスモゴンを教授単元の典型的教材として図4のような形態で示している。

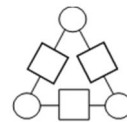


図3 アリスモゴン

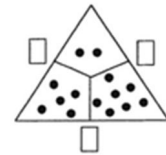


図4 Wittmannのアリスモゴン

このアリスモゴンに教材開発のストラテジーを適用して小学校算数および中学校数学の教を開発し、Wittmannの提唱する「本質的学習場 (Substantial Learning Environments; SLEs) ()」を構成する授業デザインを行った。

小学校算数の授業デザインでは、図5のようなアリスモゴンの内側の数を求めることを問題解決の最終的問題として提示し、まず、図6のように一連のアリスモゴンを2次元的に並べ、その内側の数を考えさせながら、不変性や共変性に着目させていくつかの法則を発見させ、発見した法則を適用して最終的問題を解決する問題解決過程をデザインした。

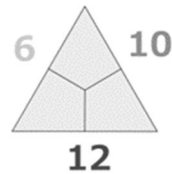


図5 最終的問題

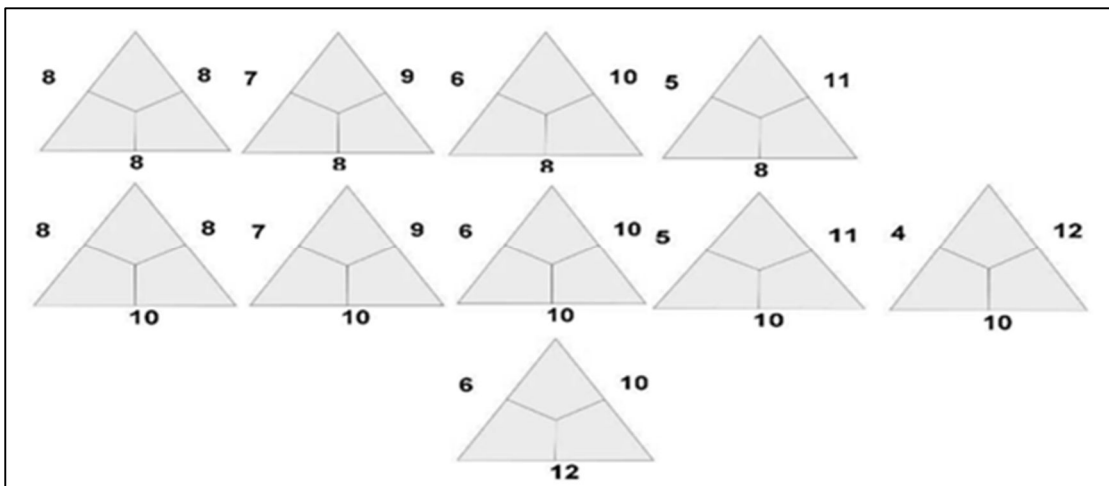


図6 2次元的に並べたアリスモゴン

(5) 「鏡の本」の教材化による本質的学習場の構成

Wittmann & Müller は、蝶番で繋いだ2枚の鏡を本に見立てて「鏡の本 (mirror-book)」と呼び、この「鏡の本」を使う教材を開発している()。この教材を参考にしながら、「鏡の本」に教材開発のストラテジーを適用して小学校算数および中学校数学の教材を開発し、Wittmannの提唱する「本質的学習場」を構成する授業デザインを行った。

小学校算数では、2枚の鏡の間に n の図において、元の図とその鏡映で作られる n の個数と鏡の角度との関係を探る授業をデザインした。 n の数が偶数個の場合は、角度が決まるが、 n の数が奇数個の場合は、鏡の角度に許容範囲があり1つに定まらない。そこで、まず n の数が偶

数個のときに、 n の個数 \times 角度 $= 360^\circ$ の関係があることを発見させ、右表のように記入させる。この関係を奇数個のときにも適用させ、奇数個のときの角度を1つに定める。最後に、実際にこのとき均整のとれた図となり、その個数になることを確かめさせるという授業展開である。この授業展開

の数	2	3	4	5	6	
鏡の角度	180		90		60	
の個数 \times 角度	360		360		360	

表1 の数と鏡の角度

では、実際に1つに定まらない角度について、表から関係性を発見して法則を仮説として設定し、演繹的に奇数個のときの角度を導き、実際にその角度を適用して検証するという「仮説演繹法」の有用性を実感させる授業デザインともなった。

また、この授業に続いて、 F を F に変えて、 F が何個どのように見えるかを探究させる授業もデザインした。 F と線対称の関係のあるペアについて調べさせる。また、鏡の角度が 90° のときに、鏡の蝶番の点を中心として、点対称な図形もできることを発見させる活動を設定した。

中学校数学では、小学校算数の教材として開発した文字 F の線対称についての教材を、図形の線対称移動として捉え直す教材を開発した。また、蝶番の位置の点の周りにできる図形を回転移動と捉えることもできる。ここでこの「鏡の本」を活用して発見させることのできる性質は、2回の対称移動は1回の回転移動となっていることである。このとき回転の角度は、2枚の鏡の開いた角度の2倍となる。中学校数学ではこのことを発見するだけでなく、演繹的に説明させ記号を使って記述させる活動も設定した授業デザインとした。

さらに、教材開発のストラテジー「ある条件・性質を否定して変更する」を活用して、鏡の蝶番を外して2枚を平行にするとどうなるかを考察させる。そして、平行移動の移動距離は、2つの鏡の距離の2倍となることを発見させる。また、ストラテジー「図を動かす」を活用し、動的図形ソフトを活用して線対称移動の2本の対称軸を連続的に平行に変化させる様子を観察させる。2つの線対称移動の合成は、対称軸が交わる状態から平行にすると回転移動が平行移動になるが、この連続的变化によって、回転移動の回転角が対称軸の角度の2倍になることが、平行移動の移動距離が対称軸の距離の2倍になることに対応していると統合的に捉えさせる授業デザインを開発した。

4. 研究成果

教材開発のストラテジーを適用して教材を開発して学習指導過程をデザインした授業は、いずれも小学校または中学校で実践し、その数学化の実現に対する効果を検証するとともに、数学化を実現する算数・数学授業の実践事例を提供することができた。教材開発・授業デザインおよび授業実践から得られた成果は次のとおりである。

(1) 教材開発のストラテジー「ある条件・性質を否定して変更する」(What-If-Not ストラテジー)によって発展的探究過程に模倣の場面を設定したことによる技能習得の教育効果

What-If-Not ストラテジーを活用した発展的授業展開過程に模倣の場面を設定したことにより、技能習得を効果的に行うことができた。

(2) 模倣を発展的探究活動の過程に組織的に設定する意義

探究的問題設定の学習指導過程において模倣が生徒の主体的活動を支えることが示され、模倣の教育的意義が実践的に示された。

(3) 数学化を実現する授業デザインにおける統合化の視点とその発展的構成の有効性

教材開発のストラテジーを適用して教材を開発し、統合化の視点から授業デザインを考案したことで、数学を洗練する4つの活動つまり一般化、拡張化、補完化、組織化を発展的に進める効果的な授業構成や指導を考えることができた。

(4) 教材開発のストラテジー「図を動かす」のための思考の道具としてのICT活用による本質的学習場の形成

ICTを活用したことで高度な数学的内容であっても苦手な生徒も取り組むことができ、統合化の高度な段階に進ませることを可能とした。実践例での統合化の活動にはICTは必要不可欠の思考の道具であり、統合化の授業の本質的学習場を形成したといえる。

(5) アリスモゴンへの教材開発ストラテジー適用による本質的学習場の構成

アリスモゴンから開発した教材は、以下の点から本質的学習場を構成できたといえる。

開発した教材は、「数と計算」領域における“数の加減法”の理解や活用に位置づけることができ、さらに「変化と関係」領域における“変化や対応の規則性に着目して問題を解決する”という関数的考え方の涵養も可能となる学習場を与えることができた。

開発した教材により、数学的な見方・考え方を働かせ、児童自らが新たな課題を持ち、探究を続ける豊かな数学的活動を実現できた。

開発した教材は、学年の学習段階に合わせた活動を設定することができ、教授学的に柔軟性を持ち、児童の実態に合わせた活動を設定することができた。

アリスモゴンを教材とした実践研究は、授業を行う教師に数学的な豊かさを自覚させ、また授業デザインにあたっては、校種を超えた実践家や研究者が協働で実践研究を進めることができ、豊かな実践研究の場を形成できた。

(6)アリスモゴン教材化による深い学びの実現

授業を進める中で、児童の課題意識は、「アリスモゴンを解く」という当初の目的から「関数的法則を見つける」へと変容した。さらに法則を数式によって記号化することで、見つけた法則から一般的解法を導き出し、その一般的解法の解が自然数の範囲にない場合を問題化する児童まで現れた。この問題解決における活動水準の向上や「方法の対象化」や記号化、演繹的推論による考察は、「深い学び」の実現と捉えられる。

(7)「鏡の本」への教材開発ストラテジー適用による本質的学習場の構成

「鏡の本」から開発した教材は、以下の点から本質的学習場を構成できたといえる。

開発した教材は、小学校算数第6学年の図形領域の内容「線対称，点対称な図形について理解すること」，中学校数学第1学年の図形領域の内容「平行移動，対称移動及び回転移動について理解すること」に位置づけることができる。また，その学習によって期待されている「図形を構成する要素に着目し，図形の性質を見い出すこと」や「図形の移動に着目し，2つの図形の関係について考察し表現すること」という数学的見方・考え方を養成するのに有効な教材を提供することができた。

「鏡の本」から構成した教材は，児童の数学的探求心を喚起し，価値のある数学的活動にすべて児童を参加させることのできる学習場を構成できたと言える。

「鏡の本」を教材とした実践研究は，授業を行う教師に数学的な豊かさを自覚させ，また授業デザインにあたっては，校種を超えた実践家や研究者が協働で実践研究を進めることができ，豊かな実践研究の場を形成できた。

引用文献

Freudenthal, H. (1991). "Revisiting Mathematics Education". Kluwer Academic Pub.

Fielker, D. (1981-1983). "Removing the Shackles of Euclid", Mathematics Teaching, Nos. 95-99 & 101-104, Association of Teachers of Mathematics.

Brown, S. I., & Walter, M. I. (1990). 平林一榮(監訳). 『いかにして問題をつくるか - 問題設定の技術 - 』, 東洋館出版社

プログル | 学校の授業で使えるプログラミング教材 (<https://proguru.jp>)

McIntosh, A. & Quadling, D. (1975). Arithmogons, Mathematics Teaching, 70, 18 - 23.

Wittmann, E. Ch. (1995): Mathematics education as a 'designscience', Educational Studies in Mathematics, 29, 4, 355 - 374.

Wittmann, E. Ch., et al. (2002). "Jenseits von PISA: Bildungsreform als Unterrichtsreform", 國本景亀, 山本信也(訳) 『算数・数学 授業改善から教育改革へ』, 東洋館出版.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (1999): Double Mirror Magic, Ernst Klett Grundschulverlag.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 0件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 吉本果矢, 中野俊幸, 水口蒔, 鈴江暢朗	4. 巻 6
2. 論文標題 本質的学習場の構成をめざした数学教材の開発について - 「鏡の本」の教材化とICTの活用 -	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 高知大学学校教育研究	6. 最初と最後の頁 107-117
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 鈴江暢朗, 水口蒔, 吉本果矢, 中野俊幸	4. 巻 5
2. 論文標題 アリスモゴンを活用した本質的学習場の構成について - ICTを活用した算数の授業デザイン -	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 高知大学学校教育研究	6. 最初と最後の頁 107-117
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 田邊元基, 中村彩乃, 中野俊幸	4. 巻 4
2. 論文標題 数学教育における統合化の研究 - プログルを活用した星形正多角形の授業デザイン -	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 高知大学学校教育研究	6. 最初と最後の頁 97-104
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 上岡栄二, 中野俊幸	4. 巻 3
2. 論文標題 数学教育における発展的な見方・考え方の育成と基本的技能の習熟を統合する授業デザインについて - What - If - Not戦略とZ.P.D.理論の活用 -	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 高知大学学校教育研究	6. 最初と最後の頁 285-293
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 吉本果矢, 中野俊幸, 水口蒔, 鈴江暢朗
2. 発表標題 本質的学習場の構成をめざした数学教材の開発について - 「鏡の本」の教材化とICTの活用 -
3. 学会等名 全国数学教育学会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 鈴江暢朗, 水口蒔, 吉本果矢, 中野俊幸
2. 発表標題 アリスモゴンを活用した本質的学習場の構成について - ICTを活用した算数の授業デザイン -
3. 学会等名 全国数学教育学会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 田邊元基, 中村彩乃, 中野俊幸
2. 発表標題 数学教育における統合化の研究 - プログルを活用した星形正多角形の授業デザイン -
3. 学会等名 全国数学教育学会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 上岡栄二, 中野俊幸
2. 発表標題 数学教育における発展的な見方・考え方の育成と基本的技能の習熟を統合する授業デザインについて - What - If - Not戦略とZ.P.D.理論の活用 -
3. 学会等名 全国数学教育学会
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	上岡 栄二 (KAMIOKA Eiji)		
研究協力者	田邊 元基 (TANABE Motoki)		
研究協力者	中村 彩乃 (NAKAMURA Ayano)		
研究協力者	鈴江 暢朗 (SUZUE Nobuo)		
研究協力者	水口 蒔 (MIZUGUTI Fuki)		
研究協力者	吉本 果矢 (YOSHIMOTO Kaya)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------