

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 19 日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2022

課題番号：20K03506

研究課題名(和文) スピン対称群の特殊ブロックの研究による既約表現の構成と導来圏同値の導出

研究課題名(英文) Study of special blocks of spin symmetric groups for irreducible representations and derived equivalences

研究代表者

土岡 俊介 (Tsuchioka, Shunsuke)

東京工業大学・情報理工学院・講師

研究者番号：00585010

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：スピン対称群のモジュラー既約表現の新しいパラメトリゼーションを發展させ、アフィン・リー環や量子群の表現論とロジャース・ラマヌジャン型恒等式の研究を行った。滝間氏と共にアンドリュースのリンク分割イデアルを有限オートマトンを用いて拡張したことが大きな成果である。この結果を用いて、新しいロジャース・ラマヌジャン型分割定理をいくつか発見・証明することができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

整数の分割のクラスについて、その母関数の差分方程式を求めることは基本的な問題である。これまでAndrewsのリンク分割を用いて有限の禁止パターンについては自動的に可能だった計算を、正規言語で表わされるような禁止パターンに拡張した。最近でも差分方程式の導出を扱った論文はいくつか散見されるが、これらの多くは我々の自動的な計算法によって再現可能である。

研究成果の概要(英文)：I developed new parameterization of modular irreducible representations of spin symmetric groups and studied relationship between representation theory of the affine Lie algebras and quantum groups and Rogers-Ramanujan type identities. A major achievement was an extension of Andrews' link partition ideals with finite automata, together with Takigiku. Using this result, I was able to discover and prove some new Rogers-Ramanujan type partition theorems.

研究分野：代数学

キーワード：対称群 量子群 アフィン・リー環 頂点作用素 整数の分割 形式言語理論 ラマヌジャン q級数

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

スピン対称群のモジュラー既約表現の新しいパラメトリゼーション(申請者と渡部氏による)は、整数の分割(特にロジャース・ラマヌジャン型恒等式)の対象としても興味深い。申請者は2019年に、滝間氏と共同で整数の分割における Nandi の予想を解決した。その最初のプレプリントではアドホックな議論(あるいはトリック)が使われており、形式言語理論で一般化(あるいは自動化)されるだろうとのアイデアはあったが、その詳細を書き下すには1年を要し、投稿用のプレプリントは2020年9月に完成した(2022年8月に American Journal of Mathematics に受理された)。この結果を用いれば、以下に述べるような表現論とロジャース・ラマヌジャン型恒等式の対応で期待されるであろう実例が得られることが明白だったため、当初の研究計画を変更し、取り組むことにした。

整数の分割とは $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$ のように、自然数を自然数の和で表すことで、数学の基本的な対象である。その中でもロジャース・ラマヌジャン恒等式(1894年)は、ハーディーが「数学で最も美しい公式」と評したように、多くの研究者を魅了してきた(実際、MathSciNet で Rogers-Ramanujan と検索すると、約400本の論文が表示される)。一方でアフィン・リー環は、1960年代に発見された新しい無限次元の対称性である。一見無関係に思える整数の分割とアフィン・リー環は、頂点作用素の理論によって相互に関係していることが明らかになり(Lepowsky-Wilson, Invent.Math.77(1984), 199-290)、今では以下が期待されている:

(*) アフィン・リー環の標準加群(最高ウェイト可積分加群)ごとに、無限積が標準加群の指標であるようなロジャース・ラマヌジャン型恒等式が存在する

上記期待(*)に関して、1980年代にレポウスキー・ウィルソンとミューマン・プリミッツが $A^{(1)}_1$ 型で、1990年代にカップレリが $A^{(2)}_2$ 型レベル3で結果を得た。前者はアンドリュウ・ゴードン恒等式と呼ばれる有名な恒等式の再発見・表現論的証明だったが、後者は表現論を用いて発見された最初のロジャース・ラマヌジャン型恒等式となった。その後も研究が進み、2010年代に入って多くの結果や予想が得られるようになった。その嚆矢となったのが、カナデ・ラッセル予想とナンディ予想である。

2. 研究の目的

ロジャース・ラマヌジャン恒等式をはじめとする整数の分割の定理は、中学生でも理解できる(が証明はしばしば難しく、深い)が、その背景に表現論がある。具体的には

(◇) アフィン・リー環の標準加群を具体的に構成する方法は何か

という問いと直接関係している。今のところ知られている明示的構成法は (P) (レポウスキー・ウィルソン Z 代数など) パラフェルミオン頂点作用素代数に関連するもの (Q) (結晶基底や量子フォック空間の古典化といった) 量子群に関連するもの (R) (籐多様体の同変ホモロジーといった) 幾何学的表現論に関連するものなどに大別され、どれも深い結果とみなされているが、相互関係は明確になっていない。また理論的な結果から、具体的な個別例を得る方法も今のところ非自明である。

上記期待(*)の特別な場合で、特に研究が進展している(X),(Y),(Z)について、(P)の観点に申請者のこれまでの研究成果を加えた以下の方法論を試みる。それは将来的には上記(◇)の手がかりになると考えられ、これについても特に(P)と(Q)の融合を試みる萌芽的なアイデアを(W)について試みる。

- (X) $D^{(3)}_4$ 型でレベル3の場合と考えられているカナデ・ラッセル予想
- (Y) $A^{(2)}_2$ 型のロジャース・ラマヌジャン型恒等式 ($A^{(2)}_2$ アンドリュウ・ゴードン恒等式)
- (Z) $A^{(1)}_2$ 型のロジャース・ラマヌジャン型恒等式 (A_2 ロジャース・ラマヌジャン恒等式)
- (W) 頂点作用素構成と京都パス模型(完全柏原クリスタル)の対応

3. 研究の方法

(X) について: カナデ・ラッセル予想の頂点作用素解釈を与える。通常の頂点作用素解釈では2種類の頂点作用素を用いるが(ここで2は D_4 型ルートの総数24をねじれコクセター数12で割った商である)、これでは2色分割が得られるため、カナデ・ラッセル予想に対応しない。い

くつかのアフィン型について、1 種類の頂点作用素でも標準加群が構成できることを示す。 $A^{\{3\}}_4$ 型レベル 3 で達成できれば、ワイル・カッツ指標公式によって、カナデ・ラッセル予想の主張する等号のうち、片側の不等号が証明できる。

(Y) について：レベルが 4 までは結果があり、また捻じれコクセター数 6 と共通因子が多いレベルでは難しそうだという経験則があるため、レベル 5,7 について研究する Z 代数のアプローチ、知られているアンドリュウ・ゴードン型恒等式の再帰パターン、他のアフィン型の主指標との一致、などのアイデアを試す。また、アンドリュウ・ゴードン型恒等式を冒頭の論文の方法で有限オートマトンを用いて表すと規則的な系列になるため、カナデ・ラッセルによる分割恒等式探索の有限オートマトン版を考察する。

(Z) について：レベルが 3 の倍数でない場合は多くの研究があるので、レベル 3 の場合に頂点作用素を用いて、真空加群の基底の候補を求める（なお 3 はコクセター数である）。A2 ロジャーズ・ラマヌジャン恒等式は円柱分割の観点から研究されてきたが、2 重分割に注目するのは新たな視点である。またその結果を元にコーティール氏、ワーナー氏といった専門家と共同で、A2 ロジャーズ・ラマヌジャン恒等式の発見を目指し、それぞれの研究者のアプローチを理解・融合するための会合もオーストリアで行った。

(W) について：京都パス模型による柏原クリスタルの実現（Kang-Kashiwara-Misra-Miwa-Nakashima-Nakayashiki, Duke Math.68 (1992), 499-607）に、ロジャーズ・ラマヌジャン型恒等式が得られるような、「クリスタルの元の長さ」の適切な定義を与える。その準備として、第二ロジャーズ・ラマヌジャン恒等式を、Misra・三輪実現（のテンソル積）に同じ考えを適用して証明する（なお、最近でも第二ロジャーズ・ラマヌジャン恒等式は結び目理論を用いた証明や、RSK 対応を用いた証明が与えられている）。

4. 研究成果

冒頭で述べた論文で Nandi の予想を解決した。D.Nandi は博士論文（2014 年、Rutgers 大学）において、 $A^{\{2\}}_2$ のレベル 4 の標準加群の Z 代数を計算し、ロジャーズ・ラマヌジャン型恒等式を予想したが、リンク分割イデアルの理論（Andrews, Bull. Amer. Math. Soc., (1974)）が使えない新しい分割の予想であった。我々は、計算機科学の標準教程である形式言語理論における有限オートマトンを用いることで、既存の理論が自然に一般化でき、広いクラスの分割について、その母関数の差分方程式が自動で求まることを示し、結果として Nandi の予想を解決した。それも用いて（(2)と(4)では分割の差分方程式の計算に用いられる。（3）では連立差分方程式から単独の差分方程式を得るために、冒頭の論文のサーベイが用いられる）2022 年度には 4 本の論文を執筆し、プレプリントサーバーに投稿することができた。それぞれの論文の概要は以下のとおりである。

(1) 第二 Rogers-Ramanujan 恒等式の Kleshchev 多重分割を用いた別証明を与えた（arXiv:2205.06038）。

(2) $A^{\{1\}}_2$ 型レベル 3 で標準加群の Lepowsky-Wilson の Z 代数を考え、Rogers-Ramanujan 型恒等式を導出した（arXiv:2205.04811）。

(3) 完全結晶に「長さ関数」を定義し、 $A^{\{1\}}_1$ 型レベル 3 に適用することで、Rogers-Ramanujan 恒等式の「フィボナッチ類似」を与えた（arXiv:2211.04296）。

(4) Kanade-Russell 予想の頂点作用素解釈を与え、系として予想が主張する等号を不等号に変えた弱い主張が成立することを示した（arXiv:2211.12351）。また同様の考えを $A^{\{2\}}_4$ 型に適用し、modulo 16 の分割定理を 3 つ発見した。その 1 つは Andrews らによって、イジング模型（(3,4) ヴィラソロミニマル模型）の研究から発見・証明されていたものであった（本報告書作成時に、イジング模型を用いて残りの 2 つの分割定理が Slazar によって発見・証明された。これは申請者の発見・証明したものと、よく似ているが完全に同じではなく、興味深い）。Andrews らの q 級数の予備的考察が適用できて、最終的に他の 2 つの分割定理を証明することができた。なお、頂点作用素解釈をカナデ・ラッセル予想の証明に格上げするには、プリミツが「関係式の関係式」と呼んでいるものの計算に関する新たなアイデアが必要で、それは本研究の先の課題と考えている。

また上記の(Y)について、 $A^{\{2\}}_2$ のレベル 5,7 と期待されるアンドリュウ・ゴードン型恒等式を証明し、 $A^{\{2\}}_{13}$ 型レベル 2 の予想を述べた論文を Proc.AMS 誌に出版した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Takigiku Motoki、Tsuchioka Shunsuke	4. 巻 149
2. 論文標題 Andrews-Gordon type series for the level 5 and 7 standard modules of the affine Lie algebra $SA^{(2)}_{-2}$	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 2763 ~ 2776
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/proc/15394	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Tsuchioka Shunsuke	4. 巻 97
2. 論文標題 A local characterization of $B_{\{2\}}$ regular crystals	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 51 ~ 56
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3792/pjaa.97.010	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Tsuchioka Shunsuke	4. 巻 29
2. 論文標題 BMR Freeness for Icosahedral Family	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Experimental Mathematics	6. 最初と最後の頁 234 ~ 245
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/10586458.2018.1455072	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Tsuchioka Shunsuke	4. 巻 99
2. 論文標題 A proof of the second Rogers-Ramanujan identity via Kleshchev multipartitions	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 23-26
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3792/pjaa.99.005	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 5件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Shunsuke Tsuchioka
2. 発表標題 A proof of Nandi's conjecture
3. 学会等名 Rocky Mountain Representation Theory Seminar (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 土岡俊介
2. 発表標題 Toward the Andrews-Gordon identities for $A^{\{2\}}_2$
3. 学会等名 JCCA2020-DMIA2020-SGT9ミニシンポジウム組合せ論表現論 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Shunsuke Tsuchioka
2. 発表標題 A Fibonacci variant of the Rogers-Ramanujan identities via crystal energy
3. 学会等名 Workshop on Cylindric Partitions (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shunsuke Tsuchioka
2. 発表標題 An example of A_2 Rogers-Ramanujan bipartition identities of level 3
3. 学会等名 OIST Representation seminar (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shunsuke Tsuchioka
2. 発表標題 A Fibonacci variant of the Rogers-Ramanujan identities
3. 学会等名 組合せ論的表現論における最近の展開
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shunsuke Tsuchioka
2. 発表標題 An example of A2 Rogers-Ramanujan bipartition identities of level 3
3. 学会等名 早稲田整数論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 A workshop on q-series, quantum modular forms and representation theory	開催年 2020年～2020年
---	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------