

令和 6 年 6 月 25 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03511

研究課題名(和文) 不変体の有理性問題

研究課題名(英文) the rationality problem for fields of invariants

研究代表者

山崎 愛一 (Yamasaki, Aiichi)

京都大学・理学研究科・准教授

研究者番号：10283590

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：(1)新潟大学の星明考さん, 呉工業高専の金井和貴さんとの共同研究である. k を代数的数体, K/k を15次以下の代数拡大とすると, K/k のHasseノルム原理が成り立つ必要十分条件を決定した.
 (2)新潟大学の星明考さん, 長谷川寿人さんとの共同研究である.15次以下の代数拡大 K/k に対し, ノルム1トーラス $\mathcal{R}_{K/k}^1(G_m)$ の安定 k -有理性問題を決定した.
 (3)新潟大学の星明考さんとの共同研究である. K/k を代数拡大でGalois閉包 L/k が n 次二面大群 D_n のときにノルム1トーラス $\mathcal{R}_{K/k}^1(G_m)$ の安定 k -有利性問題を決定した.

研究成果の学術的意義や社会的意義

K/k のハッセノルム原理は数論でよく知られた問題だが, $[K:k]$ が6以下の場合や素数の場合など特別な場合しか知られていなかった.特に $[K:k]=8,12$ の場合はほとんど知られていなかった.本研究では主にYu. A. Drakokhrust, V. P. Platonovの結果に従って計算機も用いてdegree 15まで網羅的に決定した.

研究成果の概要(英文)：(1)This is a joint work with Hoshi Akinari at Niigata University and Kanai Kazuki at Kure College. Let k be a number field, K/k be an extension of degree at most 15, we determined a necessary and sufficient condition for the Hasse norm principle for K/k .

(2)This is a joint work with Hoshi Akinari at Niigata University and Sumito Hasegawa. Let K/k be an extension of degree at most 15. We determined a complete answer to the rationality problem up to stable k -equivalence for norm one tori $\mathcal{R}_{K/k}^1(G_m)$ of K/k .

(3)This is a joint work with Hoshi Akinari at Niigata University. We determined a complete answer to the rationality problem up to stable k -equivalence for norm one tori $\mathcal{R}_{K/k}^1(G_m)$ of K/k whose Galois closures L/k are dihedral extensions.

研究分野：代数学 特に数論

キーワード：数論 代数幾何 計算数学 有理性問題 Hasseノルム原理 ノルム1トーラス

1. 研究開始当初の背景

この問題は、Galois 逆問題「任意の有限群 G に対して、体 k の G 拡大が存在するか」と密接に関連している。Galois 逆問題は、特に $k=\mathbb{Q}$ のときは有名な未解決問題である。有理性問題が肯定的、すなわち $K(x_1, \dots, x_n)/G$ が K 上純超越拡大であるとする、 K が Hilbert 体である場合には、 K 上の G 拡大が存在することが知られている。元々の Noether 問題は、 G が x_1, \dots, x_n に置換作用として作用している場合を問題にしていた。それをもっと色々な作用に対して考えることを目的とする。

2. 研究の目的

具体的な有理性問題を、代数幾何的手法や計算機をも用いつつ主に数論的手法を用いて研究するのが目的である。具体的には

- (A) 不分岐コホモロジー群と有理性問題
- (B) 代数的トーラスと有理性問題
- (C) 数論および代数幾何のアルゴリズム開発の3つに大別される。

3. 研究の方法

本研究は、数論や代数幾何の理論と、計算機による計算の両方を使った研究である。有理性問題は、主に代数幾何的な側面からさまざまな研究がなされている。しかしそれらの研究の多くは抽象的な概念や理論に基づいていて、具体的問題に適用するのは困難であった。本研究では数論や代数幾何の分野の枠組みにとらわれずに代数学のさまざまな分野の理論を工夫して活用し、計算機をも使用しつつ、今まで誰も解けなかった具体的な有理性問題を解決することが目的である。

4. 研究成果

- (1) 新潟大学の星明考さん、呉工業高専の金井和貴との共同研究である。 k を代数的数体、 K/k を 15 次以下の代数拡大とすると、 K/k の Hasse ノルム原理が成り立つ必要十分条件を決定した。 K/k が Galois 拡大のときや $[K:k]$ が素数のとき、 $[K:k]$ が 6 以下のときはすでに知られているが、 K/k が非 Galois 拡大のときあまり知られていなかった。特に $[K:k]=8, 12$ のときはほとんど知られていなかった。
ノルム 1 トーラス T に対し、 T の弱近似定理を表す量として $A(T), T$ の Hasse の原理の成否を表す量として $m(T)$ が知られている。 T の character module M に対して M の flabby class を $[F]$ とするとき、完全列
$$0 \rightarrow A(T) \rightarrow H^1(F) \rightarrow m(T) \rightarrow 0$$
が成り立つことが知られている (Voskresenskii)。理論的にも技術的にも工夫されたアルゴリズムを用いることにより、代数的数体の 15 次以下の代数拡大に対して $m(T)=0$ となる条件を網羅的に決定した。この結果の応用例として玉河数 $\tau(T)$ を計算することができる。

k を代数的数体、 $L \subset K \subset k$ を有限次拡大の列で L は k 上 Galois 拡大とする。 $\text{Obs}(K/k) = (N_{K/k}(A^{\times K}) \cap k^{\times}) / N_{K/k}(K^{\times})$ を K/k のハッセノルム原理の total obstruction、 $\text{Obs}_1(L/K/k) = (N_{K/k}(A^{\times K}) \cap k^{\times}) / ((N_{L/k}(A^{\times L}) \cap k^{\times}) N_{K/k}(K^{\times}))$ を有限次拡大の列 $L \subset K \subset k$ に対応する K/k のハッセノルム原理の first obstruction と呼ぶ。

$\text{Obs}(K/k) = 1$ は K/k のハッセノルム原理が成り立つための必要十分条件になっている。また $\text{Obs}_1(L/K/k) = \text{Obs}(K/k) / (N_{L/k}(A^{\times L}) \cap k^{\times})$ である。一般に $\text{Obs}(K/k)$ の計算は難しいが、 $\text{Obs}_1(L/K/k)$ の方は比較的簡単に計算できることが知られている。そこで、 K を含む k の Galois 拡大 L を適当に取って、total obstruction を first obstruction の計算に帰着させることを考える。Galois 群の Schur cover を取ることにより、そのような L が存在することは知られていた。しかしそれでは $[K:k]$ が 8 や 12 の場合は、網羅的に計算するのは現実的ではない。そこでなるべく次数の低い L を取ることにより $[K:k]$ が 15 以下の場合に網羅的に計算することを可能にした。

- (2) 新潟大学の星明考さん,長谷川寿人さんとの共同研究である.15次以下の代数拡大 K/k に対し,ノルム 1 トーラス $R_{K/k}^{(1)}(G_m)$ の安定 k -有理性, retract k -有理性を決定した. character module M の flabby resolution

$$0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow F \rightarrow 0$$

を考える。ただし P は permutation module, F は flabby module である。 F の stably permutation class $[F]$ は flabby resolution の取り方によらずに一定であることが知られていて、 $[F]$ を flabby class と呼ぶ。

K/k を分離拡大, L を k 上 K の Galois closure とする. $K = k(\alpha)$ となるような $\alpha \in K$ が取れる. $G = \text{Gal}(L/k)$, $H = \text{Gal}(L/K)$ とおく. $[K : k] = n$ とおく. α の k 上共役元を $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ とおく. G に対し $(\sigma \ i) = (i)$ の対応により G は S_n の transitive subgroup とみなせる. このとき H は G の 1 の stabilizer に等しい. G における H と共役な部分群は i の stabilizer ($1 \leq i \leq n$) である. それらの共通部分は恒等置換のみである. H は G の正規部分群を単位元のみからなる群以外は含んではならない.

norm one torus $R^{(1)}_{K/k}(G_m)$ の stably k -rationality, retract k -rationality を調べるには,
$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[G/H] \rightarrow J_{G/H} \rightarrow 0$$

に対して $J_{G/H}$ の flabby class $[F]$ が 0 か,可逆かを調べればよい。一般に, flabby class が可逆かどうか判定するよりも flabby class が 0 であることを示す方が難しい。

Flabby class $[F]$ が可逆だとわかっているとき, flabby resolution を複数回取ることにより $[F]=0$ を示せる場合がある。しかしその方法では $[F]=0$ を示すことができない場合もあり, 同型を具体的に作ることにより証明した。一番大変だった ${}_{9}T_{27} \cong \text{PSL}_2(\mathbb{F}_8)$ の安定 k -有理性だけはまだプレプリントの状態で, 論文を投稿中である。

Hoshi, A.Yamasaki : Rationality problem for norm one tori. Israel Journal of Mathematics 241 (2021) 849-867

S.Hasegawa, A.Hoshi, A.Yamasaki: Rationality problems for norm one tori in small dimensions. Mathematics of Computation 89 (2020) 923-940

(プレプリント)

Hoshi, A.Yamasaki: Rationality problem for norm one tori for A_5 and $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_8)$ (arXiv:2309.16187)

- (3) 新潟大学の星明考さんとの共同研究である。 K/k を代数拡大で Galois 閉包 L/k の Galois 群 G が n 次二面大群 D_n のときにノルム 1 トーラス $R_{K/k}^{(1)}(G_m)$ の安定 k -有利性問題を決定した。 K に対応する G の部分群を H とするとき, H に含まれる G の最大の正規部分群は 1 でなければならない。そのような H は $H=1$ (すなわち K/k が Galois 拡大) のときと, H が G の中心 $Z(G)$ とは異なる位数 2 の群の場合の二つしかない。 $H=1$ のときと, H の位数が 2 で n が奇数または 2 べきのときはすでに遠藤-宮田により解決済みであった。本研究では残っていた H の位数が 2 で n が 2 べき以外の偶数のときを解決した。 n が 4 で割って 2 余るときは安定 k -有理的, 4 の倍数のときは retract k -有理的ではない。これも(2)と同様、同型を具体的に作ることにより flabby class $[F]$ が 0 になることを示した。

Hoshi, A.Yamasaki: Rationality problem for norm one tori for dihedral extensions. Journal of Algebra 640 (2024) 368-384

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 A. Hoshi, K. Kanai, A. Yamasaki	4. 巻 91
2. 論文標題 Norm one tori and Hasse norm principle	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematics of Computation	6. 最初と最後の頁 2431-2458
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/mcom/3735	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 A. Hoshi, K. Kanai, A. Yamasaki	4. 巻 244
2. 論文標題 Norm one tori and Hasse norm principle, II: Degree 12 case	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 84-110
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jnt.2022.09.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 A. Hoshi, M. Kang, A. Yamasaki	4. 巻 283
2. 論文標題 Multiplicative Invariant Fields of Dimension 6.	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Memoirs of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1-137
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/memo/1403	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Akinari Hoshi, Aiichi Yamasaki	4. 巻 241
2. 論文標題 Rationality problem for norm one tori	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Israel Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 849-867
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11856-021-2117-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hoshi Akinari, Yamasaki Aiichi	4. 巻 640
2. 論文標題 Rationality problem for norm one tori for dihedral extensions	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 368 ~ 384
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2023.10.034	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 山崎愛一
2. 発表標題 Norm one tori and Hasse norm principle
3. 学会等名 代数的整数論とその周辺2021
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Algorithm (Aiichi Yamasaki's Homepage) https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~yamasaki/Algorithm/

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------