

令和 6 年 6 月 18 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03513

研究課題名(和文) 組合せの変異を駆使した格子凸多面体に関連する諸問題の解決

研究課題名(英文) Solutions of problems related to lattice polytopes via combinatorial mutations

研究代表者

東谷 章弘 (Higashitani, Akihiro)

大阪大学・大学院情報科学研究科・准教授

研究者番号：60723385

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、新概念である「組合せの変異」を用いた格子多面体の理論の構築である。具体的には、「課題1：格子多面体の組合せの変異に関する不変量の開発」「課題2：組合せの変異を用いた格子多面体の分類およびEhrhart多項式の研究」の2つに取り組む。研究期間の4年間で、28本の学術論文を執筆し国際雑誌にて出版されている。また、21件の学会発表を行うなど、様々な研究成果をあげることが出来た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、格子凸多面体に関する研究の一種である。格子凸多面体とは、例えば「ナップサック問題」と呼ばれる整数計画問題の文脈でも現れる対象であり、応用数学などの分野における非常に重要な対象として知られている。4年間実施した本研究は、「組合せの変異」と呼ばれる格子凸多面体に関する局所変形の研究であり、様々な研究成果をあげた。今後は、本研究によって得られた成果の、整数計画問題等への応用も見据えた研究が可能となる。

研究成果の概要(英文)：The goal of this research project is the establishment of the theory of lattice polytopes using a new notion "combinatorial mutations". As concrete problems, "1: development of new invariants on combinatorial mutations of lattice polytopes" and "2: classifications and Ehrhart polynomials of lattice polytopes using combinatorial mutations" are investigated. As the results of this project for four years, 28 research articles have been written and published in some international journals. Moreover, 21 research talks have been given, so several research outcomes have been achieved.

研究分野：代数的組合せ論

キーワード：格子凸多面体 組合せの変異 Ehrhart多項式 Fano多面体

## 1. 研究開始当初の背景

格子凸多面体とは、頂点が全て格子点であるような凸多面体のことを指す。格子凸多面体は、様々な分野において登場する重要な数学的対象の1つであり、広く研究が展開されている。格子凸多面体は、代数幾何・可換環論・最適化・統計学など、様々な分野において登場し、本質的な役割をしばしば担うので、格子凸多面体の構造解析を行うことで深い理解が出来れば、その波及効果は大きい。2012年に、格子凸多面体の“組合せ的変異”と呼ばれる概念が導入された。組合せ的変異は、クラスター代数の理論を背景として誕生した格子凸多面体の局所変形であり、ミラー対称性・表現論・代数幾何など様々な文脈で登場する近年注目を浴びている概念である。そのような学術的背景も踏まえ、他分野への応用を見据えた格子凸多面体の組合せ的変異に関する研究に着手することに決めたのである。

一方で、格子凸多面体の重要な不変量の1つである「Ehrhart多項式」は、格子凸多面体に含まれる整数点の個数を反映した数え上げ関数のことであり、数え上げ組合せ論において盛んに研究されている組合せ論的対象である。格子凸多面体の組合せ的変異とEhrhart多項式のいずれも重要な概念であるにも関わらず、その両者の関係性に関する研究はほとんど行われていなかった。

そこで本研究では、格子凸多面体の組合せ的変異を駆使した格子凸多面体に関する諸問題の解決に向けて、「組合せ的変異不変量の開発」および「組合せ的変異を用いた格子凸多面体の分類およびEhrhart多項式の研究」を両輪として研究を進めることにした、というのが研究を開始した当初の研究背景である。

## 2. 研究の目的

上記の通り、本研究の目的は、格子凸多面体の組合せ的変異に関する研究であり、その先の応用を見据えた研究を展開する。本研究におけるより具体的な研究課題として、組合せ的変異に関する以下の2つの研究課題(A)(B)に取り組む。

- (A) KNP予想の高次元化の考察
- (B) 組合せ的変異を用いた格子凸多面体の分類理論の探究

研究課題(A)は、格子凸多面体の中でもFano多面体と呼ばれる“トーリックFano多様体”と1対1に対応する多面体のクラスに関する研究である。Kasprzyk-Nill-Princeにより、「Fano多角形の組合せ的変異同値類と、トーリック多様体にqG変形可能なdel Pezzo曲面のqG変形同値類が、1対1に対応する」という予想(以下、KNP予想と呼ぶ)を提唱している。KNP予想は、Fano多角形がある条件を満たす一部のFano多角形に対して解決しているが、大部分が未解決である。“ある条件”とは、singularity contentと呼ばれる不変量に関する条件であり、任意のsingularity contentの場合にKNP予想の一般的な解決を試みるのは自然である。一方で、KNP予想は2次元の話であるため、KNP予想の高次元化を考察するのも極めて自然な着想である。研究課題(A)は、KNP予想の高次元化に向けて、まずはsingularity contentを高次元化することを目的としている。

研究課題(B)に関して、格子凸多面体のEhrhart多項式と組合せ的変異は相性が良い。ここで、 $d$ 次元格子凸多面体 $P$ に対し、 $P$ を $n$ 倍に膨らませたものに含まれる格子点の個数を表した数え上げ関数を考えると、それは $n$ に関する $d$ 時多項式になることが知られており、今日ではEhrhart多項式と呼ばれている。素朴な問いとして、「同じEhrhart多項式を持つ格子凸多面体にはどのような関係があるか?」というものがあるが、ごくわずかに結果は知られているものの、一般的な解決には程遠いのが現状である。一方で、組合せ的変異の“双対版”を適用すると、Ehrhart多項式を保つことが知られている。そこで、組合せ的変異を用いることで、この問いに対して何かしらの解決を与えることが研究課題(B)の目的である。

## 3. 研究の方法

上記の課題(A)および(B)に対し、研究方法はいずれも共通して、具体例の徹底的な計算から一般的な状況を予想して課題の解決を試みる、という手法である。

研究課題(A)に対し、まずは(Fano多角形に対して導入された) singularity contentの高次元版の開発を試みる。Singularity contentはFano多面体に付随する巡回商特異点に着目して開発された不変量であるため、まずは商特異点に依らない不変量の開発を目指す。その際、KNP予想の高次元版に対応するものも考察し、部分的解決も並行して検討する。例えば、Fano多面

体の Ehrhart 多項式などの組合せ的不変量や、付随するトーリック環に関する環論的不変量などを考察する。適宜、計算実験も交えながら、様々な可能性を模索する。

研究課題( B )に対し、まずは反射的凸多面体の分類に対して、組合せ的変異の適用を考える。反射的凸多面体は、ミラー対称性や可換環論など様々な文脈で登場する重要な格子凸多面体のクラスの1つとして広く認識されている。また、反射的凸多面体は、次元を固定すると有限個であり、4次元以下ではその分類が完全に知られている。まずは4次元反射的凸多面体に着目し、それらの組合せ的変異同値類の分類を行う。その分類結果を考察し、一般の場合の分類のための端緒とする。

#### 4 . 研究成果

本研究の主な研究成果として、28本の学術論文の執筆、および、21件の学会講演を行った。例えば、組合せ的変異理論を“順序多面体と鎖多面体の組合せ的変異同値性”の証明に適用した研究成果は、組合せ的変異の理論を初めて既存の組合せ論の枠組みに適用した初めての例である。順序多面体と鎖多面体は、同じ Ehrhart 多項式を持つが一般には unimodular 同値でない。しかし、組合せ的変異同値であることを示すことで、新たな枠組みの提供に成功している。本研究成果は、複数の(国際集会を含む)学会にて口頭発表を行っている。

また、順序多面体と鎖多面体の組合せ的変異同値性の研究を発展させ、他分野への応用にも成功している。具体的には、旗多様体の既存の Newton-Okounkov 凸体同士が全て組合せ的変異同値であることを示した。旗多様体の Newton-Okounkov 凸体の研究は、旗多様体のトーリック退化の構成とも関係し、様々な分野が交差する研究トピックであり、当該分野における近年のトレンドの1つである。クラスター理論との関連が知られており、変異同値性は知られていたが、既存の変異の理論の枠組みで同値性が説明できない箇所を、組合せ的変異で説明することで理論の統一を図ったのである。他にも、SAGBI 基底を用いたグラスマン多様体(旗多様体の一種)のトーリック退化の構成を、組合せ的変異同値性を示すことで行うなど、組合せ的変異の格子凸多面体理論への応用として、トーリック退化理論の構築に成功している。

上記の研究以外にも、Fano 多角形に関する不変量である singularity content を深堀するため、Daniel Cavey 氏との共同研究で、singularity content をある条件で固定した際の Fano 多角形の分類を行った。さらに、グラフ理論や可換環論においても一定の成果を挙げており、28本という論文数に繋がっている。

総括して、本研究は順調に展開され、研究課題( A )では研究する余地は残しつつも、研究課題( B )については十分に満足のいく形で完成したと言える。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計19件（うち査読付論文 19件 / うち国際共著 7件 / うちオープンアクセス 7件）

1. 著者名 Higashitani Akihiro, Tran Tan Nhat, Yoshinaga Masahiko	4. 巻 -
2. 論文標題 Period Collapse in Characteristic Quasi-Polynomials of Hyperplane Arrangements	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnac104	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Higashitani Akihiro, Ueyama Kenta	4. 巻 73
2. 論文標題 Combinatorial study of stable categories of graded Cohen-Macaulay modules over skew quadric hypersurfaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Collectanea Mathematica	6. 最初と最後の頁 43 ~ 54
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13348-020-00306-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Akihiro Higashitani, Kazuki Kurimoto, Mikiya Masuda	4. 巻 59
2. 論文標題 Cohomological rigidity for toric Fano manifolds of small dimensions or large Picard numbers	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 177 ~ 215
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Higashitani Akihiro, Osaka University, Japan, Nakajima Yusuke, Kyoto Sangyo University, Japan	4. 巻 18
2. 論文標題 Deformations of Dimer Models	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2022.030	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Higashitani Akihiro, Matsushita Koji	4. 巻 50
2. 論文標題 Levelness versus almost Gorensteinness of edge rings of complete multipartite graphs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications in Algebra	6. 最初と最後の頁 2637 ~ 2652
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/00927872.2021.2015362	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Higashitani Akihiro, Kurimoto Kazuki	4. 巻 301
2. 論文標題 Cohomological rigidity for Fano Bott manifolds	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 2369 ~ 2391
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-022-02994-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hachimori Masahiro, Higashitani Akihiro, Yamada Yumi	4. 巻 29
2. 論文標題 The Root Distributions of Ehrhart Polynomials of Free Sums of Reflexive Polytopes	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 The Electronic Journal of Combinatorics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.37236/10795	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Higashitani Akihiro	4. 巻 -
2. 論文標題 The Characterisation Problem of Ehrhart Polynomials of Lattice Polytopes	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Interactions with lattice polytopes	6. 最初と最後の頁 181 ~ 195
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-98327-7_8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Higashitani Akihiro, Matsumoto Naoki	4. 巻 346
2. 論文標題 The ratio of the numbers of odd and even cycles in outerplanar graphs	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 113285 ~ 113285
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2022.113285	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Higashitani Akihiro, Kurihara Hirotake	4. 巻 51
2. 論文標題 Homogeneous quandles arising from automorphisms of symmetric groups	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications in Algebra	6. 最初と最後の頁 1413 ~ 1430
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/00927872.2022.2137173	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Higashitani Akihiro, Ohsugi Hidefumi	4. 巻 226
2. 論文標題 Quadratic Grobner bases of block diagonal matching field ideals and toric degenerations of Grassmannians	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2021.106821	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Higashitani Akihiro, Matsushita Koji	4. 巻 594
2. 論文標題 Conic divisorial ideals and non-commutative crepant resolutions of edge rings of complete multipartite graphs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 685 ~ 711
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2021.12.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Higashitani Akihiro, Matsushita Koji	4. 巻 226
2. 論文標題 Three families of toric rings arising from posets or graphs with small class groups	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 107079 ~ 107079
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2022.107079	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Clarke Oliver, Higashitani Akihiro, Mohammadi Fatemeh	4. 巻 -
2. 論文標題 Combinatorial mutations and block diagonal polytopes	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Collectanea Mathematica	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13348-021-00321-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Naoki Fujita and Akihiro Higashitani	4. 巻 -
2. 論文標題 Newton-Okounkov bodies of flag varieties and combinatorial mutations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnaa276	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Daniel Cavey and Akihiro Higashitani	4. 巻 73
2. 論文標題 Winding Number of $r$ -modular sequences and Applications to the Singularity Content of a Fano Polygon	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Tohoku Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 137-158
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2748/tmj.20200207	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Akihiro Higashitani, Benjamin Nill and Akiyoshi Tsuchiya	4. 巻 -
2. 論文標題 Gorenstein polytopes with trinomial $h^*$ -polynomials	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Beitrage zur Algebra und Geometrie	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13366-020-00513-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Akihiro Higashitani and Kenta Ueyama	4. 巻 -
2. 論文標題 Combinatorial study of stable categories of graded Cohen-Macaulay modules over skew quadric hypersurfaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Collectanea Mathematica	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13348-020-00306-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Akihiro Higashitani, Kazuki Kurimoto and Mikiya Masuda	4. 巻 -
2. 論文標題 Cohomological rigidity for toric Fano manifolds of small dimensions or large Picard numbers	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計17件 (うち招待講演 7件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 東谷章弘
2. 発表標題 12点定理とその一般化について (パート2)
3. 学会等名 JCCA2022
4. 発表年 2022年



1. 発表者名 東谷章弘、上山健太
2. 発表標題 グラフのスイッチングと付随する単体的複体による $(\pm 1)$ 歪多項式環の分類
3. 学会等名 日本数学会秋季分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 東谷章弘
2. 発表標題 グラスマン多様体のmatching field による2つのトーリック退化の組合せ的変異同値性
3. 学会等名 日本数学会秋季分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Akihiro Higashitani
2. 発表標題 Period collapse in characteristic quasi-polynomials of non-central hyperplane arrangements
3. 学会等名 Combinatorics, geometry and commutative algebra of hyperplane arrangements (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 東谷章弘
2. 発表標題 同変Ehrhart理論における効果性予想とそのある種の反例
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 東谷章弘、上山健太
2. 発表標題 行列のスイッチングと付随する単体的複体による歪多項式環の分類
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Akihiro Higashitani
2. 発表標題 Combinatorial mutation equivalence of poset polytopes
3. 学会等名 AMS Western Sectional Meeting (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 東谷章弘
2. 発表標題 隣接行列のternary rankについて
3. 学会等名 応用数学合同研究集会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 東谷章弘
2. 発表標題 グラスマン多様体のトーリック退化とSAGBI基底
3. 学会等名 可換環論の新しい融合セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Akihiro Higashitani
2. 発表標題 Lattice polytopes with small numbers of facets arising from combinatorial objects
3. 学会等名 Mini Symposium on Lattice Polytopes (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 東谷章弘
2. 発表標題 組合せ論の対象に付随する様々な可換環
3. 学会等名 2022年度日本数学会年会 (企画特別講演) (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Akihiro Higashitani
2. 発表標題 Newton-Okounkov bodies of flag varieties and combinatorial mutations
3. 学会等名 The McKay correspondence, mutation and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 東谷章弘
2. 発表標題 半順序集合に付随する2つの凸多面体と組合せ的変異
3. 学会等名 日本数学会秋季分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 藤田直樹、東谷章弘
2. 発表標題 旗多様体の Newton-Okounkov 凸体と組合せ的変異
3. 学会等名 日本数学会秋季分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Akihiro Higashitani
2. 発表標題 Introduction to combinatorial mutations of polytopes and its applications
3. 学会等名 Combinatorics on Flag Varieties and Related Topics 2021 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 東谷章弘、松下光虹
2. 発表標題 完全多部グラフのエッジ環のconic因子的イデアルと非可換クレパント特異点解消の構成
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 東谷章弘、大杉英史
2. 発表標題 Block diagonal matching fieldイデアルとグラスマン多様体のトーリック退化
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<https://sv2-mat.ist.osaka-u.ac.jp/~higashitani/index.html>

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 Characteristic Polynomials of Hyperplane Arrangements and Ehrhart Polynomials of Convex Polytopes	開催年 2023年～2023年
国際研究集会 Combinatorial and Algebraic Aspects of Lattice Polytopes	開催年 2023年～2023年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------