様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月　５ 日現在

機関番号：１５４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2020～2023
課題番号：２０Ｋ０３５１４

研究課題名（和文）モチーフの有限次元性、Conservativity、そしてその周辺

研究課題名（英文）Finite dimensionality of motives, Conservativity, and beyond

研究代表者
木村　俊一（Kimura, Shun-ichi）

広島大学・先進理工系科学研究科（理）・教授

研究者番号：１０２８４１５０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：組合せゲームの局面のK理論を数概念の拡張として考えた場合、これまで数学者が常識として持っていた数概念の大幅な一般化になっていることを（再）発見し、その厳密な記述に取り掛かった。組合せゲームについて（１）取った石の一部を別の山に戻すことも許すタイプの石とりゲームであるYama Nim, Triangular Nim について深く研究し、特にそのWythoff Variation で興味深い必勝法記述を発見した。（２）Enforce Operator, Carry on Operator についてグランディー数を定義し、あるいは組合わせるとグランディー数が定義できなくなくなる例を発見した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
無限を含む数概念の拡張は、例えば物理学の繰り込み理論の新しい解釈など、驚くべき応用につながる可能性がある。Enforce Operator や Entailing Phenomena は、本研究は組合せゲーム理論の枠組みで行われているが、隠された情報や確率・不確定性などが現れるより一般のゲーム理論の脈絡にも応用できる可能性があり、そうなれば経済学での意思決定に対する新しい提案につながる可能性がある。単純に組合せゲームとして対人（あるいは対コンピューターで）遊ぶゲームとしても面白いゲームの提案につながる可能性がある。

研究成果の概要（英文）：We considered the K-theory of Combinatorial Game theory as a generalization of the notion of Numbers, and (re)-discovered that this generalization gives counter-intuitive notion of infinity for usual mathematicians, and started up to make a regorous and understandable explanation of this notion of numbers.
As for the theory of Combinatorial games, (1) we studied Yama-Nims and Triangluar-Nims, which are 2 piles Nims, where the player takes some tokens from one pile, and returns a strictly smaller number to the other pile. In particular, when combined with Wythoff type variation, very interesting winning strategy appears. (2) For Subtraction Nims, we combine them with Enforce operator and Carry on operator, and defined Grundy numbers for each of these extensions. but when we combine both of them, entailing phenomena appears and Grundy numbers are not defined any more.

研究分野：組合せゲーム理論

キーワード：組合せゲーム　K理論　Enforce Operator　Comply/Constrain　超現実数　有限次元性　モチーフ理論

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

代数多様体のモチーフの K 理論について、研究代表者が 1995 年ごろに提唱した「有限次元性予想」が大きな役割を果たすことがわかってきており、予想の証明に向けて引き続き研究を進めることが長年にわたって最も大きな課題であった。この予想に対しては、2018 年に Ayoub 氏が証明を発表していたが、証明にギャップが発見され、そのギャップは本研究の期間が終了した今も修復されていない様子である。
一方、代数多様体に限らず、他の数学的対象、例えば組み合わせ的な構造に対して、似た現象が見つかれば面白いと考えて、枠組みを広げることも重要な課題であると考えていた。

２．研究の目的

まず、代数多様体のモチーフの K 理論の有限次元性の証明（Ayoub の証明のギャップを埋めること、あるいは別のアイデアで証明を与えること）が、第一の目標であった。Ayoub 氏が用いた理論は、研究代表者があまり得意ではない手法を多用しており、長大な論文を何本も重ねて証明を与えようというもので、その中の小さなギャップを気にしつつ、その長大な論文を細部まで慎重に読むことは現実的でない：Ayoub 氏の理論を理解しようと研究集会では、いくつも小さな疑問が提出され、その場で解決したものもあれば、一旦保留とされたあと、その研究集会の間に修正が行われたものもあり、さらに解決策のアウトラインのみが提案されて、詳細はあとで発表する、とされたものもあった。その後 Ayoub 氏は証明が完結したとは発表していないので、まだ解決されない問題点が残されているのだと考えられる。
一方、他の圏の K 理論で、似たような現象（適切な定義のもとで有限次元性が示されないか、あるいは期待できないか？有限次元性を仮定すれば多くの応用を持ちうるのではないか？）を探すことを第二の目標として、特に組合せ論的な対象を中心に、視野を広げることを目標とした。

３．研究の方法

数学の研究は何がヒントになるかわからないので、さまざまな研究集会に参加して他の研究者との交流を深め、研究課題を深めたり広めたりすることが、このような手探り状態が続く時の常套手段である。その中で、組合せゲームの K 理論が、有限次元性というよりも、数理論の一般化として、大変興味深いものであることに気づき、組合せゲーム、特に Transfinite と呼ばれる分野の研究に舵取りを向けた。そもそも通常の自然数の概念が、「有限集合の K 理論」として定義されるべきものであり、有限次元性予想とは、ある意味で「代数多様体のモチーフを有限集合のように扱えるタイプの問題がある」と解釈することができる。研究の途中で組合せゲーム理論を事実上創始した Conway の「On Numbers And Games」という著書に接し、本研究の脈絡からすると、この本は「数概念をゲームの局面の K 理論として扱える」という内容であると解釈できることに気づいた。例えば「不偏ゲーム」（石とりゲームを典型として、先手と後手が同じ着手を許されるゲーム）の局面は、K 理論として見ると「石が何個あるか」という自然数によってあらわされることになり（ただし、足し算の演算は通常の自然数の和ではなく、ニム和と呼ばれる組合せゲーム特有の和になるので、自然数が標数２の環（驚いたことに、ニム積という積構造により、体にもなる）として振る舞うことになる。ゲームの必勝法の分析というよりは、数概念の拡張の可能性を与える発見であり、本研究の後半は、K 理論を含む組合せゲームの研究に集中することになった。

４．研究成果

有限集合の圏の K 理論は整数環を与えるが、無限集合の圏では無限集合に元を一つ加えた集合も元の集合と濃度が同じになるため、K 理論は自明なものとなってしまう。しかし、例えば有限次元線型空間の K 理論は、集合としては無限集合となるにもかかわらず、次元を考えることで有限的な扱いが可能になる。無限集合でも、さらに構造を与えることによって K 理論がより実情を反映したものになるのである。組合せゲームの K 理論を考えた時、値は必ずしも有限になるとは限らないが、逆に値として無限大という値をとっても、それは無限集合の濃度としての無限とは異なる振る舞いをし、無限概念の新しい理解につながることを発見した。実際 Conway は「On Numbers And Games」の前書きで、組合せゲームが Transfinite な無限の理解につながることを発見したので、この本を執筆することにした、みたいなことを言っているわけだが、Conway の

著書は数学的に見て十分精密であるわけではなく、その後いくつか数学的な精密化を試みた研究がなされているが､研究代表者の目から見るとどれも不十分なもののように感じられる｡実際、組合せゲームから生まれる「超現実数」のアイデアで無限概念が覆された、ということを理解している数学者は現状ほとんどいないように思われる。まずは超現実数の理論を普通の数学者が気軽に読んで納得できるような精密さと平易さをもってきちんと書き下すこと、という研究目標を得たことが､本研究期間の最大の研究成果であると考える｡これが達成できれば､従来の「無限＋１は同じ無限に決まっている」とか「無限小は実在せず、いくらでも小さい正の実数を動的に取ることができるだけである」とかの無限理解に修正を迫り、少なくともそのような必要があれば適切な無限解釈のもとで、無限＋１＞無限となったり、静的な「１／無限」を考えたり（もちろん厳密な意味で「無限」×「１／無限」＝１となる）できる体系が作れることになる（というか、Conway の精密さで良ければ既に作られているのであるが、そのことを知っている数学者はほとんどいないと思われる)。
Sprague-Grundy の理論によれば「短い」不偏ゲームの局面は、ある非負整数 N によって、「N 個の石がある１山の石とりゲームの局面」とあらわされる局面と同一視できるわけだが（これを例えば「『短い』不偏ゲームの局面集合の K 理論は自然数と同一視できる」と表現できる）Transfinite な順序数を用いれば、必ずしも短くない（しかし必ず有限回で終了する）不偏ゲームの局面はある順序数 M によって、言わば「M 個の石がある１山の石とりゲームの局面」と同一視できることがわかる。つまり、無限個石がある局面と同一視できるようなゲームの局面が構成でき、しかもその無限に１を足すと真に大きくなる、という現象が起こる。不偏ゲームでは、同じゲームの局面２つの和を考えると真似っこ作戦によって必ず後手必勝になるが、後手必勝の局面は「ゼロゲーム」と呼ばれて加法の単位元と同一視されるため、不偏ゲームの局面の K 理論は標数２の（無限も、無限の２乗も、無限の無限乗も含めた）標数２の体と同一視できることになる。(自然数全体は、２元体 F_2={0，1} の２べキ次拡大全体の和集合と同一視され、最小の無限大ωは２の３乗根となる）

以上は、新しい問題意識の発見であり､主に組合せゲームの研究者ではない数学者に向けて今後に大きな成果としてあらわれてくるべきものであるが、現状の組合せゲーム研究者に向けても、いくつか新しい成果を得たので、ここで簡単に報告しておく。

（１） ２山の石とりゲームで、一方の山からは石を取り、もう一方の山には取った数よりも少ない個数の石を戻す、とういことを許す石とりゲームについて深く考察した。これは元々指導学生の山下貴央氏が修士論文で発表した内容(Yama Nim)から始まっているが、インド工科大学の Urban Larsson 教授によって一般化され（Triangular Nim)、さらに「少なくとも一方の山から a 個の石をとり、もう一方の山には少なくとも（resp.あるいはぴったり）b 個の石を返す、ただし a は正整数、b は整数で a-b>0 を満たす、という ab-Triangular Nim，(resp. ab-Yama Nim) の必勝法について深く考察した。
（２） 特に ab-Triangular Nim に加えて、両方の山から石を取っても良い、ただしその場合取る石の個数の差は c 以下になるようにする(c=0 ならば古典的な Wythoff Nim の一般化になっている)という abc-Nim を考えた時、驚いたことに必勝法の記述に３角数や平方数などがあらわれることを発見した。具体的には、a=2，b=1，c=0 としたある意味最も簡単な abc-Nim で、(x，y)が良形（後手必勝）となる x，y を、x<y の場合に書き並べていくと、(0，1)，(1，3)，(3，6)，(6，10)，(10，15)，…と三角数が現れる。これを a=2，b=c=1 とすると、(0，1)，(1，4)，(4，9)，(9，16)，(16，25)，… と平方数になる｡一般に a=2，b=1 の時､同様の意味で(c+3)角数の列が現れることを証明した。
（３） Enforce Operator (プレイヤーが手順でプレイするときに、許されるルールが何通りかあらかじめて与えられていて、対戦相手がどのルールに従ってプレイするかを決めることができる)という不偏ゲームに対して考察を行い、真似っこ作戦はできなくても Grundy 数が定義できることを証明した。
（４） ゲームの和について、２つのゲームが与えられたときに､その組合せとして通常の和（２つのゲームのうち、プレイヤーはどちらか一方を選んでプレイする、Disjunctive sum と呼ばれる、組合せゲーム理論の研究でもっとも標準的にあらわれる）の他に「両方のゲームをプレイする」(Conjunctive sum)「原則両方のゲームをプレイするが、どちらか一方がプレイできなくなったら、もう一方だけをプレイすることを許す」(Continued Conjunctive sum)「両方プレイしても、どちらか一方だけプレイしても構わない」（Selective sum）などの和が Conway の「On Numbers and Games」で紹介されているが、このうち Disjunctive Sum と Continued Conjunctive Sum の２つのルールを選んで、それらの Enforce Operator を、２山の制限ニムに対して考察すると、ルールが簡単なのに、非常に複雑な良形集合があらわれる、という現象を発見した（指導学生である小田原亜久里氏との共同研究。この成果でインドでの国際研究集会に招待された。
（５） 制限 Nim において、Carry on Operator との組合せを考察した。例えば「１個、２個あるいは３個の石が取れるが、３個石を取った場合はもう一度自分に手番が回ってくる(Carry on)」これだけだとグランディー数が定義できるが、さらにそのようなルールいくつかと、Enforce Operator とを組み合わせると古典的なグランディー数では表され

ないようなゲーム局面があらわれることを発見した。例えば「１個または２個石が取れる、ただし１個石を取った場合はもう一度自分の手番になる」というルール A と、「１個または２個石が取れる、ただし２個石を取った場合はもう一度自分の手番になる」というルール B を考えて、そのどちらのルールを適用するかを Enforce Operator で決めるようにすると、最初２個石がある山が２つあるとき、これは「２個石がある山」と自分自身の和なので、もしも Grundy 数が定義できるならば標数２であることから後手必勝のはずなのだが、これは先手必勝となることが確かめられ、Entailing 現象と呼ばれる現象が起こっていることがわかる。これまでにも Entailing の例は知られていたが、おそらくもっとも簡潔な新しい Entailing の例であると思われる。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計14件（うち招待講演　7件／うち国際学会　7件）

１．発表者名 木村俊一
２．発表標題 無限の数え方（After Cantor, Weil and Conway)
３．学会等名 広島・岡山代数学セミナー（招待講演）
４．発表年 2023年

１．発表者名 木村俊一
２．発表標題 もしもコラッツ予想を真剣に考えている時に、誰か他の人が解決してしまったら、明日からは一体何を考えれば良いのだろうか？
３．学会等名 代数学ワークショップ（広島大学)（招待講演）
４．発表年 2023年

１．発表者名 木村俊一　山下貴央
２．発表標題 On variations of Yama Nim ~What happens if you return stones in Nim games?
３．学会等名 第７回日本組合せゲーム理論研究集会
４．発表年 2023年

１．発表者名 木村俊一　山下貴央
２．発表標題 Comply/Constrain games のグランディー数について
３．学会等名 第７回日本組合せゲーム理論研究集会
４．発表年 2023年

1．発表者名 木村俊一
2．発表標題 逆形の不偏ゲームと正規形でのグランディー数について
3．学会等名 第７回日本組合せゲーム理論研究集会
4．発表年 2023年

1．発表者名 木村俊一　山下貴央
2．発表標題 On variations of Yama Nim: ~What happens if you return tokens in Nim games~
3．学会等名 IJCDCG^3研究集会、インドネシア　ヌサドゥア（国際学会）
4．発表年 2023年

1．発表者名 木村俊一
2．発表標題 Are Real Numbers really real?
3．学会等名 The First QJM workshop，広島大学（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2023年

1．発表者名 木村俊一　小田原亜久里
2．発表標題 Enforce operation of the disjunctive sum and the Continued Conjunctive Sum
3．学会等名 Game at Mumbai （インド工科大学、ムンバイ校）（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2024年

１．発表者名
木村俊一

２．発表標題
Repeat Options and Enforce operator for Subtraction NIMs, and their generating functions

３．学会等名
広島岡山代数学セミナー（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2024年

１．発表者名
山下貴央*, 安福智明, 木村俊一, 木谷裕紀, Larsson Urban, Saha Indrajit, 末續 鴻輝

２．発表標題
Comply/constrain operator of conbinatorial games について

３．学会等名
第７回日本組合せゲーム理論研究集会

４．発表年
2023年

１．発表者名
山下貴央　木村俊一

２．発表標題
Comply/Constrain operator of combinatorial games

３．学会等名
IJCDCG^3研究集会　（インドネシア、ヌサドゥア）（国際学会）

４．発表年
2023年

１．発表者名
山下貴央　木村俊一

２．発表標題
Yama Nim と Wythoffバリエーションについて

３．学会等名
GWP-23研究集会 箱根セミナーハウス

４．発表年
2023年

1．発表者名 山下貴央　木村俊一
2．発表標題 Yama Nim, Triangular Nim, and their Wythoff variations
3．学会等名 Game at Mumbai （インド工科大学、ムンバイ校）（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2024年

1．発表者名 山下貴央　木村俊一
2．発表標題 On variations of Yama Nim and Triangular Nim
3．学会等名 広島岡山代数学セミナー（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2024年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計1件

国際研究集会	開催年
広島岡山代数学セミナー	2024年～2024年

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関