様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６年　６月１６日現在

機関番号：３２６１９
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2020～2023
課題番号：２０Ｋ０３５２０

研究課題名（和文）有限テンソル圏の森田双対と関連する代数的手法の研究

研究課題名（英文）Study of algebraic methods for Morita dual of finite tensor categories and related algebraic structures

研究代表者
清水　健一（Shimizu, Kenichi）

芝浦工業大学・システム理工学部・准教授

研究者番号：７０６２４３０２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,600,000円

研究成果の概要（和文）：大きな結果として，柴田大樹（岡山理科大学）と共同で，余代数の中山関手の基礎理論を確立したことが挙げられる。有限次元とは限らない余代数Cに対して右C-余加群圏上の自己関手として中山関手を導入し，それが有限次元代数の中山関手と同様に余エンドで表されることを示した。さらに，中山関手の性質と余代数の性質（半完全性，準余フロベニウス性，対称余フロベニウス性など）との関係性を与えた。また，フロベニウステンソル圏に関する様々な結果も得られた。この他にも，中山関手とテンソル圏の森田理論に関する研究を行い，様々な場合における中山関手の公式や，有限テンソル圏における準フロベニウス代数の特徴づけに関する結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究課題では中山関手とテンソル圏の森田理論について研究し，テンソル圏に関する様々な基礎的な結果が得られた。テンソル圏の理論は，代数学的な見地からのみならず，低次元トポロジー，作用素環論，数理物理学などの観点からも重要である。これらの分野におけるテンソル圏の研究はフュージョン圏（有限かつ半単純なテンソル圏）に対するものが多かったが，本研究では半単純の場合に知られている多くの結果を非半単純な場合に一般化しており，ここに本研究の特色がある。近年では，フュージョン圏の理論が物質のトポロジカル相と関連して盛んに研究されており，将来的には，そのような方向性からの応用も期待される。

研究成果の概要（英文）：As joint research with Taiki Shibata (Okayama University of Science), I established basic theory of Nakayama functors for coalgebras. We introduced the Nakayama functor for a coalgebra C, which is not necessarily finite-dimensional, as an endofunctor on the category of right comodules over C and showed that it is expressed by coends as in the finite-dimensional case. We also gave relation between properties of the Nakayama functor and those of the coalgebra (including semiperfectness, quasi-co-Frobenius property, and symmetric co-Frobenius property). In addition, we gave some applications to Frobenius tensor categories. I also studied Nakayama functors and Morita theory of finite tensor categories, and obtained some formulas of the Nakayama functor and characterizations of quasi-Frobenius algebras in finite tensor categories.

研究分野：代数学

キーワード：ホップ代数　テンソル圏

様　式　Ｆ－１９－２

１。研究開始当初の背景

Gelfand-Naimark の定理により，局所コンパクト空間はその上の関数のなす代数（関数環）から復元することが可能である。関数環は可換環であるが，可換とは限らないような環をある仮想的な空間の上の関数環であると捉えて研究していこうというのが“非可換幾何学”の考え方のひとつである。数学において対称性の概念は群や Lie 代数によって記述されるが，ホップ代数はそのような代数的構造を非可換幾何学的な立場から一般化するものと捉えられる。したがって，一般のホップ代数の理論は非可換幾何学的な設定における群論であると言えよう。

さて，群や Lie 代数，より一般にホップ代数の表現論においては，表現同士のテンソル積および表現の双対（反傾表現）を考えることができる。Etingof らの教科書“ Tensor categories ”に倣い，このような“テンソル積”および“双対”を持つ線形アーベル圏をテンソル圏と呼ぶことにしよう。テンソル圏はホップ代数の（余）表現圏よりも真に大きなクラスであり，表現論的な観点から研究がされていることは言うまでもない。しかし，そればかりではなく，共形場理論などの数理物理学的な観点や，結び目や三次元多様体の位相不変量の研究などの観点からも興味を持たれており，極めて重要な研究分野となっている。

研究代表者は，ある種の有限性を持つテンソル圏，正確には Etingof と Ostrik の意味での有限テンソル圏（finite tensor category）について研究してきた。半単純な有限テンソル圏はフュージョン圏（fusion category）と呼ばれ，低次元トポロジー，共形場理論，部分因子環論などを動機として盛んに研究されている。フュージョン圏の場合（つまり半単純な設定）においてすらわかっていないことはたくさんあるが，テンソル圏の研究者の一部では“非半単純”なテンソル圏からフュージョン圏の場合より強力な理論が構築できないだろうかという期待がある。例えば Lyubashenko によって基礎付けられた“非半単純”モジュラーテンソル圏の理論や，１の冪根における量子群の表現論のように，半単純とは限らない設定における興味深い研究や様々な実例があるからである。もちろん，半単純な設定から非半単純な設定への移行を目論む際には様々な技術的困難が生じるため，それらを解決していくことが重要であった。

２。研究の目的

テンソル圏はテンソル積と呼ばれる二項演算の与えられた圏として定義されている。したがって，集合への群作用のように，テンソル圏の作用する圏を考えることができる。このようなものは環論・加群論における用語法を借用しテンソル圏上の加群圏と呼ばれている。加群の準同型全体の集合は写像の合成を積とする環となるが，同様の構成を有限テンソル圏上の良いクラスの加群圏（indecomposable exact module category）に対して考えたものがテンソル圏の森田双対と呼ばれるものである。Ostrik は加群圏や森田双対がそれまでの共形場理論や部分因子環論の研究において暗黙的に現れていることを指摘し，加群圏の組織的な研究を開始した。

Etingof と Ostrik の論文“ Finite tensor categories ”において説明されていることだが，有限テンソル圏の研究において加群圏および森田双対の考え方は極めて重要である。研究代表者は，これまでの研究において，有限次元ホップ代数に関する指標や積分の理論を有限テンソル圏へと一般化し，有限テンソル圏と関連する分野において様々な応用を与えていた。本研究課題は，そのようなアプローチを近年の有限テンソル圏の研究およびその応用において重要であるテンソル圏上の加群圏およびテンソル圏の森田双対に対して適用し，そのような代数構造を取り扱うための基本的な手法を開発することを目的としていた。

３。研究の方法

有限次元ホップ代数の対合射の 4 乗を表す Radford の公式は，Etingof, Nikshych, Ostrik によって有限テンソル圏へと一般化された。ここでは，彼らの結果を有限テンソル圏の S4-公式と呼ぶことにしよう。Fuchs, Schaumann, Schweigert は，有限次元代数の表現論において用いられていた中山関手がある種の普遍性によって特徴づけられることを示し，中山関手と二重随伴との間の関係式などを与えた。Fuchs らが指摘しているように，実は有限テンソル圏の S4-公式は中山関手の一般的な性質からただちに得られる。それだけではなく，有限テンソル圏の対称フロベニウス性の判定条件や，研究代表者が過去に与えた有限テンソル圏の間のテンソル関手のフロベニウス性の判定条件なども中山関手の一般的な性質から従う。このような理由により，中山関手およびそれと密接に関連した相対セール関手は，有限テンソル圏および加群圏の研究において基本的かつ重要な道具であると考えられる。

冒頭で，ホップ代数とは群を非可換幾何学的な立場から一般化するものであると述べた。局所コンパクト群上のハール測度やモジュラー関数の代数的な類似として，ホップ代数上の積分やモジュラー関数が定義される。有限次元ホップ代数の表現圏においては，中山関手は有限次元ホップ代数の積分やモジュラー関数と関係していることが見て取れる。そこで，本研究では，中山関手をホップ代数の積分理論の一般化と捉え，ホップ代数の理論において培われた様々な手法をテンソル圏の立場から見直し，テンソル圏，加群圏，森田双対などへの応用を目指すことから研究を始めた。

４。研究成果

(1) 局所有限アーベル圏における中山関手の理論とその応用

柴田大樹（岡山理科大学）と共同で，余代数の中山関手の基礎理論を確立した。有限次元とは限らない余代数 C に対して右 C-余加群圏上の自己関手として中山関手を導入し，それが有限次元代数の中山関手と同様に余エンドで表されることを示した。さらに，余代数の様々な性質と中山関手との関係を調べた。いくつか例を挙げれば，N を余代数 C の中山関手とするとき，

① C が半完全なら，N は有限次元射影的右 C-余加群の圏から有限次元入射的右 C-余加群の圏への圏同値を引き起こす。また，このとき，有限次元右 C-余加群の圏は N で閉じている。
② N が圏同値であることと C が準余フロベニウス余代数であることは同値である。
③ C が準余フロベニウスであると仮定する。このとき，N が有限次元余加群の次元を保つことと C が余フロベニウス余代数であることは同値である。
④ N が恒等関手と同型であることと C が対称フロベニウス余代数であることは同値である。
⑤ C は準余フロベニウスであると仮定する。このとき，単純右 C-余加群 S に対し，S の入射包絡 E(S)は N(S)の射影被覆である。特に E(S)の top は N(S)である。

すべての単純対象が入射包絡を持つようなテンソル圏は，フロベニウステンソル圏と呼ばれる。中山関手の余エンドとしての表示を用いて，局所有限アーベル圏（正確にはその帰納極限による完備化）の中山関手を定義した。余代数の中山関手の基本的な性質を用いることで，中山関手を用いて示される有限テンソル圏に対する様々な結果が，即座にフロベニウステンソル圏に対して一般化されるという，期待以上の結果が得られた。例えば，

① フロベニウステンソル圏の様々な特徴づけ：テンソル圏 C に対し，C がフロベニウスであること，C が 0 でない入射的対象を持つこと，C が 0 でない射影的対象を持つことなどの条件はすべて同値である。
② 中山関手の公式：フロベニウステンソル圏 C の中山関手は，二重双対関手と N(1)で表すことができる。ここで 1 は C の単位対象である。
③ フロベニウステンソル圏における S4-公式を証明した。また，これを用いてフロベニウステンソル圏に対して球面性という条件を定義し，リボン性との関係性を与えた。
④ ホップ代数に対し，0 でない余積分の存在性，余フロベニウス性，余半完全性などの条件は同値であることが知られていた。この同値性について，テンソル圏の理論の立場から，全く新しい証明を与えた。

以上の結果は Advances in Mathematics 誌から出版されている。また，一連の結果の解説を研究集会の報告集として投稿している（内容はプレプリントとして arXiv:2306.08508 で公開済であり,研究期間終了後ではあるが，査読を経て掲載が受理されている）。

Bruguières と Natale は，ホップ代数の短完全列の一般化として，テンソル圏の短完全列を定義し，その基礎理論を構築している。フロベニウステンソル圏の中山関手に関する結果の応用として，フロベニウステンソル圏のクラスはテンソル圏の短完全列で閉じているかという Natale の問題に対する肯定的な解答を与えることもできた（プレプリントとして arXiv:2303.14687 で公開済である）。また，結果(2)とも関連するが，有限次元の場合に知られていた，中山関手と修正トレース，球面性条件との関係についても結果が得られている。

(2) 余代数に対する Eilenberg-Watts 型定理の研究

Eilenberg-Watts の定理によれば，A と B を環とするとき，A 加群の圏から B 加群の圏への左随伴関手は A-B-双加群のテンソル積によって与えられる。柴田大樹（岡山理科大学）と共同で，余代数に対する Eilenberg-Watts 型定理の研究を行った。結果は半完全余代数の場合に顕著である。すなわち，C を半完全余代数，D を任意の余代数とするとき，右 C-余加群の圏から左 D-余加群の圏への左随伴関手は，すべて C-D-双余加群の C の双対代数上でのテンソル積によって与えられる。

このような研究を行った動機のひとつは中山関手にある。双余加群として C 自身をとると中山関手が生じる。C が半完全ならば，他の左随伴関手たちも双余加群で表され，中山関手と他の関手たちの関係性を余加群論的な立場から考察することが可能となるのである。このアプローチにより，フロベニウステンソル圏 C の射影的対象のなすテンソル・イデアルの上の修正トレースは，C がユニモジュラーであるとき，かつその時に限り存在するということが分かった。

(3) 局所有限アーベル圏上のモナドと中山関手の関係について

有限アーベル圏 A 上のモナド T が与えられたとき，T に関する多少の条件の下で，T 加群の圏はまた有限アーベル圏となる。このようにして与えられる有限アーベル圏の中山関手の公式を与え，それを用いて有限テンソル圏 C 上の C-双加群圏の中心や，C-加群関手の圏（特に有限テンソル圏の森田双対）などの中山関手を計算することができた。以上の結果はプレプリント arXiv:2208.08203 として公開済みである。なお，その後の議論により，項目(1)および(2)の結果を使えば，同プレプリントの内容は十分な射影的対象および十分な入射的対象を持つような局所有限アーベル圏に対してもほぼそのままの形で通用することが分かっている。

(4) 有限テンソル圏における相対セール関手の理論と準フロベニウス代数

C を有限テンソル圏とする。Fuchs，Schaumann，Schweigert によって導入された完全 C-加群圏に相対セール関手を，完全性を満たすとは限らない有限 C-加群圏へと一般化し，中山関手との関係など，基本的な性質を調べた。また，有限テンソル圏における準フロベニウス代数の定義を与え，その性質を調べた。結果としては，通常の準フロベニウス代数に対して知られていることの多くが，有限テンソル圏における準フロベニウス代数へと一般化される。一例を挙げれば，

① 有限テンソル圏 C における代数 A の準フロベニウス性は，C における A-加群の圏の相対セール関手が圏同値であることと同値である。さらに，これらの条件は C における A-加群の圏の中山関手が圏同値であることとも同値である。
② C がピボタル構造を持つとき，C における A-加群の圏の相対セール関手 S を C-加群関手にすることができる。関手 S が C-加群関手として恒等関手 id と同型であるとき，かつその時に限り，代数 A は C における対称フロベニウス代数である。
③ C における準フロベニウス代数はフロベニウス代数と森田同値である。特に，準フロベニウス代数のクラスは森田同値で閉じている（しかしフロベニウス代数はそうではない）。
④ C における対称フロベニウス代数のクラスは森田同値で閉じている。
⑤ 組み紐有限テンソル圏 C におけるホップ代数は，ベクトル空間の圏の場合と違って C におけるフロベニウス代数であるとは限らないが，いつも準フロベニウス代数になる。

以上の結果はプレプリント arXiv:2402.02929 として公開済みである。残念ながら証明することはできなかったが，同プレプリントでは，有限テンソル圏における単純代数は準フロベニウスであると予想しており，関連する考察も記した。この予想の肯定的解決は，Etingof と Ostrik によって与えられた「有限テンソル圏における単純代数は完全(exact)である」という予想が正しいことを導く。ここで，有限テンソル圏 C における代数 A は，C における右 A-加群の圏が完全 C-加群圏となるとき，完全であるという。

(5) 局所加群の理論と共形場理論への応用

Yadav Harshit（University of Alberta）と共同で，有限テンソル圏における完全代数および有限組み紐テンソル圏における完全可換代数の研究を行った。Laugwitz と Walton の結果を一般化する形で可換代数上の局所加群を用いたモジュラーテンソル圏の構成方法を与え，さらに非退化な有限組み紐テンソル圏の Witt 同値に関する基本的な結果を得た。この結果は共形場理論における頂点作用素代数の拡大に関する研究に応用が見込まれている。また，α-induction のアイデアを用いて，有限組み紐テンソル圏における完全代数の中心は完全可換代数になるという結果も得た。

(6) 低次元ホップスーパー代数の分類

柴田大樹および若尾亮太（岡山理科大学）と共同で，標数 0 の代数閉体上の 10 次元以下のホップスーパー代数の分類を完了した。分類結果の一部はプレプリント arXiv:2306.12637 として公開済みであり，残りの部分も公開を準備中である。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計7件（うち査読付論文　7件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　4件）

１．著者名 Shimizu Kenichi	４．巻 634
２．論文標題 Relative Serre functor for comodule algebras	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Journal of Algebra	６．最初と最後の頁 237～305
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2023.07.015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Shimizu Kenichi	４．巻 634
２．論文標題 Relative Serre functor for comodule algebras	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Journal of Algebra	６．最初と最後の頁 237～305
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2023.07.015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Shimizu Kenichi	４．巻 46
２．論文標題 Ribbon structures of the Drinfeld center of a finite tensor category	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Kodai Mathematical Journal	６．最初と最後の頁 75～114
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2996/kmj46106	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Shibata Taiki、Shimizu Kenichi	４．巻 419
２．論文標題 Nakayama functors for coalgebras and their applications to Frobenius tensor categories	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Advances in Mathematics	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.aim.2023.108960	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

1．著者名 Shimizu Kenichi	4．巻 227
2．論文標題 Pivotal structures of the Drinfeld center of a finite tensor category	5．発行年 2023年
3．雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jpaa.2023.107321	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

1．著者名 Shibata Taiki、Shimizu Kenichi	4．巻 -
2．論文標題 Modified Traces and the Nakayama Functor	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Algebras and Representation Theory	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10468-021-10102-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

1．著者名 Shibata Taiki、Shimizu Kenichi	4．巻 564
2．論文標題 Categorical aspects of cointegrals on quasi-Hopf algebras	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Journal of Algebra	6．最初と最後の頁 353～411
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2020.08.012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計12件（うち招待講演　2件／うち国際学会　4件）

1．発表者名 Kenichi Shimizu
2．発表標題 The Nakayama functor and the integral theory for Hopf algebras
3．学会等名 Hopf days in Brussels
4．発表年 2023年

１．発表者名 Kenichi Shimizu
２．発表標題 Applications of the Nakayama functor to tensor categories
３．学会等名 10th Congress of Romanian Mathematicians（国際学会）
４．発表年 2023年

１．発表者名 Kenichi Shimizu
２．発表標題 Nakayama functor for coalgebras
３．学会等名 International Workshop on Hopf Algebras（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2022年

１．発表者名 清水健一
２．発表標題 非半単純モジュラーテンソル圏
３．学会等名 代数学シンポジウム（招待講演）
４．発表年 2022年

１．発表者名 清水健一
２．発表標題 双対テンソル圏の中山関手の公式
３．学会等名 日本数学会秋季総合分科会
４．発表年 2022年

1．発表者名 清水健一
2．発表標題 二重ボゾン化について
3．学会等名 Toyama Workshop on Quantum Groups and Related Topics
4．発表年 2022年

1．発表者名 Kenichi Shimizu
2．発表標題 Nakayama functors for Frobenius tensor categories
3．学会等名 Conference on Algebraic Representation Theory（国際学会）
4．発表年 2022年

1．発表者名 Kenichi Shimizu
2．発表標題 FRT type construction of Hopf algebroids
3．学会等名 Advances in Hopf Algebroids（国際学会）
4．発表年 2021年

1．発表者名 Kenichi Shimizu
2．発表標題 Modified traces and the Nakayama functor
3．学会等名 OCAMI代数セミナー
4．発表年 2021年

1．発表者名 Kenichi Shimizu
2．発表標題 Remarks on the categorical Radford S4 formula
3．学会等名 第36回リー代数サマーセミナー
4．発表年 2021年

1．発表者名 Kenichi Shimizu
2．発表標題 Nakayama functors for Frobenius tensor categories
3．学会等名 RIMS表現論セミナー
4．発表年 2021年

1．発表者名 Kenichi Shimizu
2．発表標題 中山関手とその応用 I, II
3．学会等名 Mini workshop on "Lie algebras, Hopf algebras and related topics"
4．発表年 2021年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Kenichi Shimizu https://sites.google.com/site/shimikenx/

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関