様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　 ６ 月 １７ 日現在

機関番号：５１６０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2020～2022
課題番号：２０Ｋ０３５２６

研究課題名（和文）リー代数の観点に立脚した幾何学的不変式論の構築とその応用

研究課題名（英文）Reinterpretation of GIT from the view point of Lie algebras and its applications

研究代表者
澤田　宰一（Sawada, Tadakazu）

福島工業高等専門学校・一般教科・准教授

研究者番号：８０６４７４３８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,100,000円

研究成果の概要（和文）：加減乗除の演算が定義されている集合を体といい、1を何回か足して0になる場合、初めて0になる足す回数をその体の標数という。複素数は体を成し、複素数を係数とする定数でない多項式はどのようなものも必ず根をもつことが知られているが、そのような体のことを代数的閉体という。通常の座標平面の無限遠に直線を付け加えて閉じたものしたものを射影平面という。射影平面上では葉層構造というものが考えられ、その葉層構造により射影平面の商が考えられる。本研究では、標数2の代数的閉体上で定義される射影平面の次数-1の葉層構造による商に現れる特異点の配置について分類を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義
数学は現代社会の基礎を支えるものであり、その理論の整備は社会の発展に不可欠である。ただ、数学のどの理論がどのタイミングでどのように具体的に応用されるか予測することは困難であり、だからこそ、将来の未知の応用に向けて基礎理論をしっかりと構築しておくことが大切である。本研究では数学の一分野である代数幾何学において、射影平面の商に現れる特異点の配置について分類を行った。本研究は点の配置問題としての側面もあり、純粋数学の理論としての意義に加え、原子の配置問題などの現実的な応用への備えとしても意義のあるものだと考えられる。

研究成果の概要（英文）：A set on which addition, subtraction, multiplication, and division are defined is called a field. Complex numbers C form a field and any non-constant polynomial with coefficients in C has a root in C. Such a field is called an algebraically closed field. The characteristic of a field is defined to be the smallest positive integer n such that n1=0. We construct a projective plane by adding a line at infinity of the Euclidian plane. The notion of 1-foliations is defined on the projective plane, and the quotient of the projective plane by a 1-foliation is deduced naturally. We classify the configurations of the singular points which appear on the quotients of the projective plane by the 1-foliations of degree -1 in characteristic 2.

研究分野：代数幾何学

キーワード：フロベニウス・サンドイッチ

１．研究開始当初の背景

Mumford が創始した幾何学的不変式論は数学の一分野である代数幾何学の発展に大きく寄与してきた。数学では何かしらの対象に群が作用していて、その作用による商を考えるのは自然な発想ではあるが、代数多様体への群作用の状況では商に代数多様体の構造が入るか否かは微妙な問題を孕んでおり、幾何学的不変式論により代数多様体の商の理論の枠組みが整備・確立された。幾何学的不変式論では群作用による点の軌道に主眼があるが、この枠組みを背景に、本研究ではリー代数の関数への作用に関する商の理論の構築を目指した。リー代数による商の最も単純なものが導分による商であり、導分による商はフロベニウス・サンドイッチになっている。そのため、理論の完成に向けた第一歩として、フロベニウス・サンドイッチの研究が重要になってくる。近年、[HS]、[S1]で射影平面や Hirzebruch 曲面のフロベニウス・サンドイッチについて研究が行われてきた。具体的には、射影平面や Hirzebruch 曲面の非自明な大域的 F 正則 F-サンドイッチが分類され、扇の言葉で具体的な構造の記述も行われている。特に、フロベニウス・サンドイッチが非特異か否かは基本的な問題であるが、射影平面や Hirzebruch 曲面の非自明な大域的 F 正則 F-サンドイッチとしては、非特異なものも特異点をもつものも現れることが分かっている。また、[S2]、[S3]では射影空間やトーリック多様体の商についても研究が行われている。

２．研究の目的

リー代数の観点に立脚した幾何学的不変式論の構築が本研究の最終的な目的であり、具体的には、リー代数の作用に対する安定や半安定の概念の確立や、X=Proj R として導分 D による X の商の記述 X/D=Proj R^D の証明などを目指す。その前段として、トーリック多様体のフロベニウス・サンドイッチの分類や、射影平面の葉層構造による商に現れる特異点の種類や配置について解明を目指す。また、後者に関しては、配置が解明できたのち、その配置を実現するような特異点の重みづけについて考察を行う。

３．研究の方法

射影平面の非自明な大域的 F 正則 F-サンドイッチの分類では大域的 F 正則という条件から有理ベクトル場の形を絞り分類が行われた。そこで、まず、同様の手法で次数などの葉層構造の性質を利用して有理ベクトル場の形を絞り、その記述から商を具体的に計算し、フロベニウス・サンドイッチに現れる特異点の種類、数、配置などについて考察を行う。次に、Cox 環を利用し、トーリック多様体の大域的 F 正則 F-サンドイッチの分類を行う。そして、それらの結果を足掛かりにリー代数の観点に立脚した幾何学的不変式論の構築を目指す。

４．研究成果

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "F^e_{\mathrm{rel}}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & X^{(-e)} \\ & Y \arrow[ur, "\rho"'] & \end{tikzcd}$$

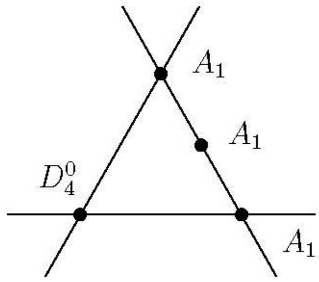
k を正標数の代数的閉体とし、X を k 上の射影的代数多様体とする。X 上の相対フロベニウス射を F_rel として、e 回合成した F_rel^e が右図式が可換になるように有限射π、ρが正規代数多様体 Y を経由するとき、Y のことを X の F^e-サンドイッチという。F^e-サンドイッチのことを単にフロベニウス・サンドイッチともいい、πの次数のことをフロベニウス・サンドイッチの次数という。また、X の接束の飽和部分層のことを 1-葉層構造といい、K(X)を X の関数体として、Der_k K(X)のことを X 上の有理ベクトル場という。[S4]で以下の成果を得た。まず、いくつかの文献に散在した事実の整理として、フロベニウス・サンドイッチ、葉層構造、有理ベクトル場について、各々の概念に対し同値類を定義し、三つの概念の関係をまとめた：フロベニウス・サンドイッチ Y、Y’は右の図式が可換になるとき同値といい、葉層構造は右の図式が可換になるような同型射 f が存在するとき同値という。また、有理ベクトル場δはある有理関数αが存在してδ^p=αδが成立するとき、p-閉であるといい、δ、δ’は 0 でない有理関数が存在してδ=αδ’が成立するとき同値であるという。このとき、次の三つのクラスに一対一の対応がある。（１）同値な次数 p のフロベニウス・サンドイッチ（２）同値な可逆 1-葉層構造（３）同値な p-閉な有理ベクトル場。これらの対応を再度整理しておくことは、今後のフロベニウス・サンドイッチの研究における基礎的な事実のひとつの参照先として意義があると考えている。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F^e_{\mathrm{rel}}"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi'" near start] & X^{(-e)} \\ Y \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "\rho"' near end] & Y' \arrow[u, "\rho'"'] \end{tikzcd}$$

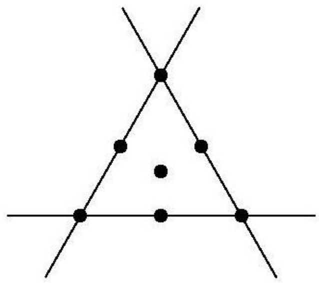
$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & T_X \arrow[d, equal] \\ L' \arrow[r, hook] & T_X \end{tikzcd}$$

次に、アフィン平面、射影平面の葉層構造による商について、いくつかの具体例の計算を行った。k を標数 2 の代数的閉体とし、P^2=Proj k[X_0, X_1, X_2]、U_0=D_+(X_0)=Spec k[X_1/X_0, X_2/X_0]=Spec k[x,y]、U_1=D_+(X_1)、U_2=D_+(X_2)として、Der_k K(X)の元δによる P^2 の商について考える。一般に、X はそのフロベニウス・サンドイッチ Y と位相同型なので、射影平面とそのフロベニウス・サンドイッチは位相同型であり、フロベニウス・サンドイッチ上の特異点の配置を、その位相同型を通して射影平面上への配置と見ることができる。以下、d_x を x の偏微分作用素、d_y を y の偏微分作用素とし、特異点の配置を射影平面上で考える（以下の図の三角形において左下が U_0、右下が U_1、上が U_2 にあたる部分である）。

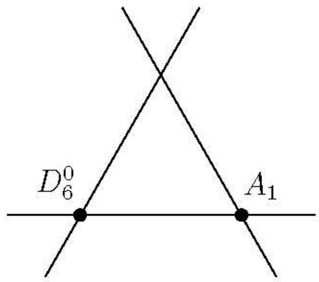
（1）$\delta=x^2d_x+ay^2d_y$ のとき、対応する可逆 1-葉層構造の次数は-1 で、U_0 の原点に D_4^0 特異点が現れ、右の一番上の図のように U_0 の無限遠直線上に 3 個の A_1 特異点が並ぶ。適当な座標変換で特異点がこの配置になる場合、その特異点の配置を $D_4^0+3A_1$ 型という。



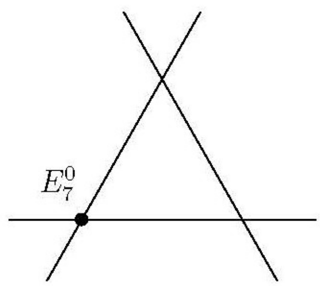
（2）$\delta=x(x+a)d_x+y(by+a)d_y$ のとき、対応する可逆 1-葉層構造の次数は-1 で、7 点の A_1 特異点が右の上から二番目の図ような配置で現れる（黒い点が A_1 特異点を表す）。適当な座標変換で特異点がこの配置になる場合、その特異点の配置を $7A_1$ 型という。



（3）$\delta=(x^2+axy^2)d_x+ay^3d_y$ のとき、対応する可逆 1-葉層構造の次数は-1 で、D_6^0 特異点と A_1 特異点が一個ずつ右の上から三番目の図のような配置で現れる。適当な座標変換で特異点がこの配置になる場合、その特異点の配置を $D_6^0+A_1$ 型という。



（4）$\delta=xy^2d_x+(ax^2+y^3)d_y$ のとき、対応する可逆 1-葉層構造の次数は-1 であり、E_7^0 特異点が U_0 の原点に現れる。適当な座標変換で特異点がこの配置になる場合、その特異点の配置を D_7^0 型という。



これらの具体例は主定理で用いられるが、それだけでなくフロベニウス・サンドイッチの研究においてトイモデルや反例として利用できる簡潔な例として価値があると考えている。

次に、葉層構造から得られる完全列に現れるフロベニウス・サンドイッチの特異点を台にもつ 0 次元閉スキーム Z の第 2 チャーン類について、以下の等式を得た。

（補題）$c_2(I_Z)=n^2-3n+3$ が成立する。

この等式は Ganong-Russell の論文で示されているものとは異なる形になっており、この等式から「射影平面の非自明な F-サンドイッチは特異である」という既知の事実がすぐに従う。補題から次の問題が生じた。

（問題）$1\leqq k\leqq n^2-3n+3$ を満たす任意の整数 k について、特異点が丁度 k 個となるような状況は起こりうるか。

そして、主定理として次の分類定理を得た。

（定理）標数を 2 として、Y を射影平面の次数-1 の可逆 1-葉層構造による射影平面の商とする。このとき、Y 上の特異点の配置は $7A_1$、$D_4^0+3A_1$、$D_6^0+A_1$、E_7^0 型のいずれかになる。

本定理から n=-1 のとき、特異点の個数は 1、2、4、7 個の場合しかないことがわかり、先の問題が否定的であることが分かる。葉層構造の次数がより低い状況で $1\leqq k\leqq n^2-3n+3$ を満たす任意の整数 k について、特異点が丁度 k 個となるような状況が起こりうるかという問題は未解決であり、今後も考察を行っていきたい。

この定理の主張は点の配置問題とも関係してくる。例えば、上記の設定で D_4^0 と 3 個の A_1 が射影平面のフロベニウス・サンドイッチに現れるとき、A_1 が直線上に並ぶような状況しか起こらない。これは、D_4^0 と 3 個の A_1 の配置を考えたとき、商に現れるという意味で自然な配置は 3 個の A_1 が直線上に並ぶものしかないということを意味しており、特異点に対しどのような重み付けをすることで、このような配置が起きるかは興味深い問題である。

本研究でリー代数の観点に立脚した幾何学的不変式論は完成できなかったが、本成果を足掛かりとして今後も研究を進めていきたいと考えている。

（参考文献）[HS]N.Hara, T.Sawada, Splitting of Frobenius sandwiches, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B24, 121-141, 2011. [S1]T.Sawada, Classification of globally F-regular F-sandwiches of Hirzebruch surfaces, preprint, arXiv:1604.00745, 2016. [S2]T.Sawada, Globally F-regular F-sandwiches of degree p of a projective space, preprint, arXiv:1604.00746, 2016. [S3]T.Sawada, Quotients of smooth projective toric varieties by μ_p in positive characteristics p, preprint, arXiv:1809.00867, 2018. [S4]T.Sawada, Singular points configurations on quotients of the projective plane by 1-foliations of degree -1 in characteristic 2, preprint, arXiv:2110.01753, 2021.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計1件（うち招待講演　1件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 澤田宰一
２．発表標題 Singular points configurations on quotients of the projective plane by 1-foliations of degree －1 in characteristic 2
３．学会等名 特異点セミナー（招待講演）
４．発表年 2021年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

T. Sawada, Singular points configurations on quotients of the projective plane by 1-foliations of degree －1 in characteristic 2, preprint, arXiv:2110.01753, 2021.

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関