

令和 6 年 5 月 21 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03530

研究課題名（和文）カラビ・ヤウ多様体とその周辺の織りなす数理

研究課題名（英文）Mathematics on Calabi-Yau manifolds and related topics

研究代表者

桂 利行（Katsura, Toshiyuki）

東京大学・大学院数理科学研究科・特任教授

研究者番号：40108444

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：代数幾何学は19世紀前半のリーマンによるリーマン面の研究に始まり、1900年前後にはイタリア学派による代数曲面の分類の研究があり、小平邦彦博士は1960年代に複素数体上の分類理論を厳密に完成させた。さらに、ボンビエリ・マンフォードは1977年に小平博士の結果を正標数の代数的閉体上の理論に一般化した。本研究では、その流れの上に立ち、標数2において有限自己同型群をもつコーブル曲面をある曲線のなすグラフを用いて分類し、各々の自己同型群の構造やモジュライ数、境界曲線の数などを決定した。また、代数曲線のヤコビ多様体のリシュロー同種写像の構造を解明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数幾何学の発展の流れに沿った研究であり、エンリケス曲面という代数曲面の分類理論上重要な位置を占める曲面の退化として現れるコーブル曲面に対して、標数2の代数的閉体上、自己同型群が有限の場合にはどのようなものが存在するかということに対する解答を与えるとともに、有限自己同型群の構造、各々のモジュライ数や境界の成分の数を決定した。また、種数2、3の代数曲線のヤコビ多様体のリシュロー同種写像の構造に関する結果を得たが、これは情報理論で現在活発に研究されている耐量子計算機暗号の理論と関係している。

研究成果の概要（英文）：In the early 19th Century, Riemann introduced the notion of Riemann surface and around 1900 the Italian school developed the theory of classification of algebraic surfaces. In 1960's Kodaira established the rigorous theory of classification of algebraic surfaces over the complex number field. Then, Bombieri-Mumford constructed the theory of classification of algebraic surfaces over the algebraically closed field of positive characteristic. In our research, based on the theory of algebraic surface, we classified the Coble surfaces with finite automorphism group by using the configuration of nodal curves and determined the structure of finite automorphism groups, the number of moduli and the number of boundary components. We also investigated the structure of Richelot isogenies of Jacobian varieties of algebraic curves of genus 2 and 3.

研究分野：代数幾何学

キーワード：K3曲面 エンリケス曲面 コーブル曲面 アーベル曲面 ヤコビ多様体 カラビ・ヤウ多様体 リシュロー同種写像 正標数

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

代数幾何の実質的な研究は19世紀前半のRiemannによるリーマン面の概念の導入に始まる。これは代数曲線、つまり1次元代数多様体の概念と等価であり、これを嚆矢として代数幾何学の研究が展開されることとなった。19世紀後半から20世紀前半にかけ、Enriques、Castelnuovo、Severi、Fanoなどのイタリア学派が代数曲面の研究を進展させ、大雑把な代数曲面の分類理論を作り上げた。我々の研究対象のエンリケス曲面は、有理曲面と似た不変量を有する曲面として、この頃エンリケスによって発見されたものである。1960年代になって、小平邦彦は層の理論を用いて複素数体上の代数曲面を含む複素曲面の厳密な分類理論を作り上げた。引き続き、Bombieri-Mumfordは、正標数の代数的閉体上定義された代数曲面の分類理論を1977年に完成させた。代数曲面の分類理論が完成すれば、その各類に属する曲面の構造を調べることが次のステップとなる。我々の研究はこの流れに沿うもので、標準束が自明な代数多様体、とくに代数曲面の性質を解明することが研究の目的となる。

(1)エンリケス曲面、コーブル曲面

有限自己同型群を有するエンリケス曲面については、複素数体上は金銅誠之による分類理論があり、標数2以外の正標数の場合についてはG. Martinによる研究があった。標数2のエンリケス曲面については、研究代表者・金銅誠之・G. Martinによる先行する研究があった。コーブル曲面はエンリケス曲面の退化として現れる有理曲面としての位置にあり、一般論としての分類理論はDolgachev-Zhangにより行われており、有限自己同型群を有するコーブル曲面については標数が2以外では金銅誠之による研究があった。標数2の場合には、エンリケス曲面はそれ以外の標数とはかなり異なる様相を呈することが上記のBombieri-Mumfordの論文で初めて見出され、大変興味深い状況にあった。コーブル曲面も標数2の場合には純非分離拡大が現れて他の標数とは全く状況が異なっており、これらのことが研究の動機となっている。

(2)アーベル曲面、K3曲面

アーベル多様体は群構造をもつ唯一の完備代数多様体であり、A.Weil、S.Lang、D.Mumfordらにより研究がなされ、数論・代数幾何などのさまざまなところに現れる重要な多様体である。K3曲面は、1950年代には取り扱いが難しい曲面としてA.Weilによって命名された興味深い曲面である。標数2以外の体上のアーベル曲面を反転で割ってできる曲面は16個の有理特異点を持つが、その特異点を解消してできる曲面はKummer曲面と呼ばれ、代表的なK3曲面である。カスプを9個持つK3曲面の構造については1990年代にBarthによる複素数体上の場合の先行する結果があり、我々は正標数の代数的閉体上の場合を扱い、純代数的な手法でより一般的な結果を得た。

(3)小平次元が1の準楕円曲面

種数1のファイブレーションを持つ小平次元が1の曲面 X の多重線形系 $|mK_X|$ を考える。標数を固定し、 m が M 以上の時、この多重線形系が全てのこのような曲面に対して種数1のファイブレーションを与える最小値 M を求める問題を考える。この問題は、楕円曲面に対しては複素曲面の場合には、 m が86以上の時は種数1のファイブレーションを与え、 $M=86$ がそのような最小値であることが1970年代後半に飯高茂により示されていた。代数曲面の場合には、1985年に研究代表者と上野健爾により標数が5以上の時は $M=14$ であることが示され、その後、研究代表者は標数が3の時には $M=14$ が最小値であること、標数が2の時は $M=12$ が最小値であることを示した。一方、準楕円曲面に対しては研究代表者により標数が3の時は $M=5$ であることが示されていたが、標数が2の時は決定することが困難であり未解決で残されていた。

(4)リシュロー同種写像

リシュロー同種写像は、情報科学の分野の暗号理論の世界で耐量子計算機暗号の構成法の一つとして期待されている同種暗号において重要な役割を果たす写像である。この概念を用いて作成されるグラフが暗号の構成に有用であり、この写像が分解するかどうかは構成した暗号の安全性に関係している。リシュロー同種写像は19世紀前半にRichelotによって暗号とは全く関係のない世界で導入された概念であるが、最近、代数曲線のヤコビ多様体のリシュロー同種写像は、種数1の代数曲線である楕円曲線の場合には多くの暗号学者によって同種暗号として研究されている。これを種数の高い代数曲線の場合に一般化することは数学的には自然なことであるが、種数2、3の代数曲線のヤコビ多様体のリシュロー同種写像を用いた暗号は研究が開始されたところであった。我々は、特に種数2の場合にリシュロー同種写像を用いてできるグラフの構造を研究対象とし、種数3の場合にはリシュロー同種写像の分解の状況を解明することを研究対象とした。

2. 研究の目的

研究の目的は、正標数において、カラビ・ヤウ多様体およびそれに関係する多様体の代数幾何

学的・数論的な構造を研究することである。研究の対象のカラビ・ヤウ多様体とは標準束が自明な多様体であるが、これは広義の意味であり、狭義には多様体の次元を n とするとき、標準束が自明でかつ構造層のコホモロジー群が 0 次と n 次以外は全て消える多様体をカラビ・ヤウ多様体と呼ぶ。広義のカラビ・ヤウ多様体は、代数多様体の分類理論において、小平次元が 0 の類に属する代数幾何的・数論的に重要な多様体であり、狭義のカラビ・ヤウ多様体は物理の素粒子論における弦理論において小さく丸まった素粒子の住む空間として用いられている。広義のカラビ・ヤウ多様体のひとつであるアーベル多様体は情報理論における公開鍵暗号の世界にも登場する重要な多様体である。曲面論においては、アーベル曲面、 $K3$ 曲面、エンリケス曲面などが研究の対象となり、そのモジュライ空間の構造や、代数的サイクルの構造、自己同型群の構造の解明を行うことが研究の目的となる。高次元においては、アーベル多様体をめぐる代数幾何学・数論の問題や、狭義のカラビ・ヤウ多様体の正則微分形式の存在問題、標数 0 への持ち上げ問題、単有理性の問題などを研究することが目的となる。

3. 研究の方法

これまで成果が得られているエンリケス曲面の退化として得られるコーブル曲面の構造を解明することから研究を始めた。金銅誠之名古屋大学名誉教授と高島克幸早稲田大学教授に国内の研究協力者を務めていただき、ライプニッツ大学ハノーファーの M. Schuett 教授とアムステルダム大学の G. van der Geer 名誉教授に海外研究協力者を務めていただいた。金銅誠之名古屋大学名誉教授とはエンリケス曲面・コーブル曲面に関する共同研究を行い、M. Schuett 教授とはアーベル曲面・ $K3$ 曲面に関する共同研究を行った。高島克幸早稲田大学教授とはアーベル多様体的一种であるヤコビ多様体のリシュロー同種写像に関する共同研究を行った。また、G. van der Geer 名誉教授には随所で研究の相談に乗っていただいた。共同研究は、相手の研究機関の訪問、招聘とともに e-mail を用いて行った。また、国際会議や各種の研究集会に参加し、研究発表するとともに、参加者と適宜討論を行うことにより代数幾何学に関する情報を収集し、研究上必要となった数学の書籍を購入して情報を集め、研究を遂行した。

4. 研究成果

標準束が自明な代数多様体とそれに関係する多様体の構造を調べ次のような成果を得た。

(1) エンリケス曲面、コーブル曲面

標数 2 におけるエンリケス曲面は Bombieri-Mumford による正標数の代数的閉体上の代数曲面の分類理論において 1977 年に初めて構造が見出された曲面である。コーブル曲面はエンリケス曲面の退化として現れる曲面であり、金銅誠之と共同で、標数 2 において有限自己同型群を有するコーブル曲面上の (-2) -曲線のグラフを用いて 7 種類に分類できることを示した。さらに、分類の各類に属するコーブル曲面が存在することを、ベクトル場による商曲面を構成する方法と有理曲面をブローイングアップする 2 つの方法で具体的に構成することによって示した。また、分類の各類の有限自己同型群の構造、モジュライ数、境界の既約成分の数を決定した。コーブル曲面はエンリケス曲面の場合と状況異なるため、既約な (-2) -曲線の他に可約なものも考慮して、ピカール格子に変えてコーブル・向井格子の概念を用いるなどの工夫が必要となる。有限自己同型群をもつエンリケス曲面の場合と同様に、分岐の状況を測るコンダクトリックスも分類した。

(2) アーベル曲面、 $K3$ 曲面

Schuett と共同で、正標数（標数 3 以外）において 9 個のカスプを持つ $K3$ 曲面 X の構造を解明した。複素数体上の場合、被覆となる曲面が複素トーラスであるため複素多様体として扱うことによる Barth の研究があったが、我々の場合は純代数的な扱いが必要となるため困難を伴う。我々はまず複素数体の場合と同様に位数 3 の自己同型を有するアーベル曲面を 3 次の被覆を持つことを示した。さらに、 X が超特異 $K3$ 曲面の場合は、 X が Artin 不変量 1 の超特異 $K3$ 曲面、または標数が 3 で 2 になり Artin 不変量 2 の超特異 $K3$ 曲面になることを示した。逆の状況として、単純なアーベル曲面が平行移動ではない位数 3 の自己同型を持つとばその商空間は必ず 9 個のカスプを持つ $K3$ 曲面になることも示した。

(3) 小平次元が 1 の準楕円曲面

標数 2 において、小平次元が 1 の準楕円曲面 X の多重線形系 $|mK_X|$ を考える。斎藤夏雄との共同研究で、 m が 6 以上であれば、任意の小平次元が 1 の準楕円曲面 X に対しこの多重線形系が準楕円曲面の構造を与えることを示した。また、 $m=6$ がこのような性質を有する m の最小値であることも、必要な不変量を有する準楕円曲面をベクトル場の理論を用いることにより構成することによって示した。この準楕円曲面は楕円曲線上の種数 1 のファイバー空間となっている。これによりこの問題の長年残されていた最後の部分を解決し、一連の問題を完全解決した。

(4) リシュロー同種写像

本研究では、種数 3 の代数曲線のヤコビ多様体のリシュロー同種写像が分解する条件を見出し、種数 2 の代数曲線のヤコビ多様体のリシュロー同種写像から作成されるグラフの構造

の解明を行った。まず、種数 3 の代数曲線のヤコビ多様体のリシュロー同種写像が分解する必要十分条件が (超楕円曲線の場合はその被覆の入れ替えではない) 位数 2 の自己同型を持つことであることを示した。さらに、そのような自己同型をもつ代数曲線が超楕円曲線である場合、超楕円曲線でない場合のそれぞれに対して、同種写像の像の分解の構造を示した。また、完全分解する場合に Howe 曲線との関係を明らかにした。種数 2 の代数曲線のリシュロー同種写像に対しては、高島克幸との共同で、種数 2 の超特殊代数曲線のヤコビ多様体のリシュロー同種写像のなすグラフの構造を明らかにした。このグラフは種数 2 の超特殊代数曲線のヤコビ多様体を頂点としリシュロー同種写像を方向付きの辺とするもので、重複を込めれば各頂点から 15 本の辺が出ている。各頂点の周りの局所的な構造を代数曲線の自己同型群を用いて決定した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Toshiyuki Katsura and Shigeyuki Kondo	4. 巻 75-4
2. 論文標題 Coble surfaces in characteristic 2	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 J. Math. Soc. Japan	6. 最初と最後の頁 1287-1337
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/87568756	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Katsura and M. Schuett	4. 巻 225(4)
2. 論文標題 K3 surfaces with 9 cusps in characteristic p	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 J. Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 論文番号:106558
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2020.106558	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 T. Katsura and N. Saito	4. 巻 73-4
2. 論文標題 On multicanonical systems of quasi-elliptic surfaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 J. Math. Soc. Japan	6. 最初と最後の頁 1253-1261
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/85058505	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Katsura	4. 巻 588
2. 論文標題 Decomposed Richelot isogenies of Jacobian varieties of curves of genus 3	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 J. Algebra	6. 最初と最後の頁 129-147
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2021.08.020	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Toshiyuki Katsura and Katsuyuki Takashima	4. 巻 Open Book Series 4
2. 論文標題 Counting Richelot isogenies between superspecial abelian surfaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 "Proceedings of the Fourteenth Algorithmic Number Theory Symposium (ANTS-XIV)" (edited by Steven Galbraith)	6. 最初と最後の頁 283-300
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/obs.2020.4.283	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する

[学会発表] 計7件(うち招待講演 7件/うち国際学会 2件)

1. 発表者名 桂 利行
2. 発表標題 Classification of Coble surfaces with finite automorphism group in characteristic 2
3. 学会等名 第26回代数曲面ワークショップat常三島、徳島大学(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 桂 利行
2. 発表標題 正標数の代数幾何
3. 学会等名 第20回岡シンポジウム、奈良女子大学(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 桂 利行
2. 発表標題 On the moduli of quasi-elliptic Enriques surfaces in characteristic 2
3. 学会等名 K3 Surfaces, Enriques surfaces, and Related Topics研究集会、名古屋大学(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 桂 利行
2. 発表標題 Decomposed Richelot isogenies of curves of genus 3
3. 学会等名 同種写像理論とその暗号への応用 (九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 (オンライン)) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Toshiyuki Katsura
2. 発表標題 Counting Richelot isogenies of supersingular curves of genus 2
3. 学会等名 Seminar of Algebraic Geometry in East Asia (Zoom) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 桂 利行
2. 発表標題 正標数のK3曲面
3. 学会等名 Encounter with Mathematics, 中央大学 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Toshiyuki Katsura
2. 発表標題 On the classification of Enriques surfaces with finite automorphism group
3. 学会等名 Aspects of Algebraic Geometry, Cetraro, Italy (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 桂 利行	4. 発行年 2022年
2. 出版社 岩波書店	5. 総ページ数 244
3. 書名 楕円曲面	

〔産業財産権〕

〔その他〕

研究成果報告集（東京大学大学院数理科学研究科） https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/activity/annualreport.html
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	金銅 誠之 (Kondo Shigeyuki)		
研究協力者	高島 克幸 (Takashima Katsuyuki)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------

ドイツ	Leibniz University Hannover			
-----	-----------------------------	--	--	--