様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　５ 月　７ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2020～2022
課題番号：２０Ｋ０３５３３

研究課題名（和文）群作用幾何に基づくモジュライ空間上の普遍族の研究

研究課題名（英文）Study of universal families over moduli spaces based on geometry of group actions

研究代表者
高村　茂（Takamura, Shigeru）

京都大学・理学研究科・准教授

研究者番号：２０３６２４３６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：代数曲線のモジュライ空間とその上の普遍族の（特異軌跡による）滑層分解を具体的に記述するため，線形商族の理論を推し進め，固定化部分群ポセット（幾何的ガロア対応により滑層分解に対応）を決定する2種類のアルゴリズムを確立した．これらを計算機
に実装し，具体例に適用して滑層分解に関する新たな知見を得た．
また，群作用幾何への応用を念頭に置いて，群に「高次構造」を導入した．これは部分群積やコセット積からなり，モノイドをなす．それらの分岐を反映する準単体複体``分岐複体''を構成した．これは群の幾何的不変量である．

研究成果の学術的意義や社会的意義
モジュライ空間上の普遍族の局所的描写を計算機上で実行可能なアルゴリズムとして実装でき，様々な具体例の計算・比較が容易となった．これは，今後のモジュライ空間の研究に大いに役立つと期待される．
群の高次構造の構成要素である部分群積やコセット積の分岐現象は，これら高次対象の導入で初めて意味を持つもので，単に部分群やコセットなどの古典的対象（これらは，いわば「一次」の対象）からは導出されえない．したがって分岐複体は，古典的対象を超えたところにある，群の深い性質を反映していると言え，今後，分野横断的な研究対象となることが期待される．

研究成果の概要（英文）：In order to describe the stratifications of singular loci on moduli spaces of algebraic curves as well as those on the universal families over them, we pushed forward the theory of linear quotient families, and established two kinds of algorithms to explicitly determine the stablizer posets corresponding to the stratifications via geometric Galois correspondence. These algorithms can be run on a computer, and powerful for giving local descriptions of the above stratifications.
Besides, we introduced ``higher order structures'' of groups, which consist of subgroup products and coset products. For finite groups, we introduced the concept of bifurcations of these structures, and constructed semi-simplicial complexes that reflect the bifurcations. These complexes are regarded as geometric invariants of finite groups.

研究分野：幾何学

キーワード：モジュライ空間　普遍族　滑層分解　固定化部分群ポセット　群作用

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

(1) 種数 g が 2 以上のリーマン面 (代数曲線) のタイヒミュラー空間には, 種数 g の向き付けられた閉曲面の写像類群が「固有不連続に」作用する．特に固定化部分群はすべて有限群である．種数 g のリーマン面のモジュライ空間はこの作用によるタイヒミュラー空間の商空間として得られる．このとき，固定化部分群 H をもつタイヒミュラー空間上の点全体の像が，モジュライ空間上の，自己同型群が H と一致するリーマン面たちに対応する軌跡になる．
ラウチ・ポップ・オートの定理より，モジュライ空間の特異点集合は非自明な自己同型群をもつリーマン面全体である(正確には，種数 2,3 の場合は自己同型群が超楕円対合以外の非自明な元をもつリーマン面全体である)．自己同型群が大きいほど，そのリーマン面が定める点はモジュライ空間の‘悪い’特異点になる．コーナルバは，リーマン面の最小の非自明自己同型群である素数位数の巡回部分群たちに着目し，$2 \leq g \leq 71$ の場合に特異点集合の既約成分を分類し，次元や分岐データなどを決定した．写像類群のタイヒミュラー空間への作用の固定化部分群(の共役類)のポセット構造(このポセットは有限部分群だけから成る)は，この既約成分たちの「交わり方」,「重なり方」を反映する滑層構造と対応している．

(2) 線形商族は，空間への群作用とその群の線形表現から構成されるファイブレーションで，著者により導入された．これは線形代数と群作用によって計算可能な対象でありながら，モジュライ空間上の普遍族(これは，線形でない商族の一例でもある) の局所的描写への応用を持つ: リーマン面 X に対応するモジュライ空間上の点[X]の近傍上での普遍族の局所的描写が，X の自己同型群の正則二次微分全体への作用から定まる表現(標準表現) から構成される X の線形商族(標準商族)の描写に帰着される．これにより，特にモジュライ空間やその上の普遍族の位相的な情報(特異点集合の既約成分の配置など)が局所的には線形代数と群作用の計算で描写可能となる．

(3) 群の幾何的な不変量としては，「群の分類空間」および有限群論で基本的な役割を果たしてきた有限群の部分群ポセット（あるいはコセットポセット）に付随した順序複体である「部分群複体」（あるいは「コセット複体」）が挙げられる．群の分類空間のコホモロジーは，ベクトル束の特性類の`棲み場所'である．また，群の分類空間はキレンの代数的 K 理論の構成でも使われる．一方，部分群複体は，ブラウンにより示されたホモロジー的シローの定理（有限群論のシローの定理の幾何版）の合同式に現れる（正確には，p 部分群複体のオイラー数が現れる)．
また，コセット複体は，そのオイラー数がホールのゼータ関数の特殊値になっているという意外性に満ちたブラウンの定理に現れる．分類空間や部分群複体，コセット複体以外に，群の幾何的な不変量を構成できないか，というのが群の高次構造の理論の出発点である．

２．研究の目的

有限群のリーマン面への作用と，その群の線形表現から構成される線形商族は，特異ファイバーをもつファイブレーションであり，底空間も一般に特異である．
線形商族の，系統だてた描写方法の展開が，本研究の目的のひとつである．同変写像の定める商写像として得られるファイブレーション(商族) は，局所的には線形商族にオービフォルド・ファイブレーションとして同型である(線形近似定理)．したがって，商族の描写は線形商族のそれへと還元されるので，線形商族の描写は本質的かつ実際的な問題である．
商族というクラスは，リーマン面のモジュライ空間上の(粗) 普遍族という応用上重要な対象を含んでいる．普遍族の線形化として得られる標準商族は，その点に対応するリーマン面の自己同型群の正則二次微分のなすベクトル空間への作用(線形表現) から構成される．したがって，普遍族を描写することは，モジュライ空間の各点の近傍上への普遍族を線形近似する標準商族の描写に還元される．
線形商族は線形作用に由来するため，原理的に「計算可能」な対象であるが，その具体的な手順(アルゴリズム) を与えることは応用上重要である．具体的には，次の三段階で行うことを目指す:
ステップ１．底空間の滑層分解の決定,
ステップ 2．分解の各成分上の特異ファイバーの型(種数や分岐データなど) の決定,
ステップ 3．特異ファイバーたちの関係(特殊化) の決定.

（ステップ１は底空間，ステップ 2 とステップ 3 は全空間の描写に対応する．）

幾何的ガロア対応の観点からは，底空間の滑層分解は固定化部分群ポセットに対応するので，固

定化部分群ポセットを具体的にハッセ図で表すことは，滑層分解の理解のために重要である．
固定化部分群ポセットのハッセ図のみならず，特異ファイバー間の「特殊化」図式も網羅したアトラスを作成し，幅広い分野の研究者に資することは大きな目標である．

また，線形商族の描写プロセスに生じる部分群ポセットの特徴付けに触発されて，群論の古典的対象（群の元，部分群，コセット）を越えた高次的対象を使って，より深く群の性質を解明することも目的とする．われわれの観点では，群の元は 0 次，部分群やコセットは 1 次の対象であり，高次の対象は部分群積やコセット積で与えられる．

３．研究の方法

上で挙げた線形商族の描写のプロセスのステップ 1，ステップ 2，ステップ 3 を具体的な例に対して遂行するため，まずステップ 1 について，底空間の滑層分解と対応する固定化部分群ポセット(正確には，その共役類のポセット)の具体的な計算プロセスを，計算機に実装可能な形で確立する．

さらに，実際にそのアルゴリズムを運用して具体例の計算を行い，モジュライ空間上の普遍族の局所的描写を行う．より一般に，標準商族以外の線形商族に対しても計算を行い，表現の性質と線形商族の特異軌跡の配置などとの関連を考察する．

モジュライ空間上の普遍族の描写には自己同型群作用の固定化部分群ポセットが重要な役割を果たす．この観点から，モジュライへの応用を見込んで空間への群作用をより細かく解析する．
具体的には，ひとつの群の作用をそれ単独で考察するのではなく，
部分群作用や剰余群の作用，さらには部分群積作用・コセット積作用などを含めた作用同士の相互連関を``一斉に''考察する．

有限群を正規部分群で割って剰余群を得る操作に付随する部分群ポセットの「ブローダウン」を描写したり，群に「高次構造」(部分群積やコセット積のなすポセットモノイド)を導入し，
それら全体の様子から定まる不変量を構成したりすることにより，（部分群ポセットだけから得られることよりも一層深く）群の構造や群作用に関する知見を得ることを目指す．

４．研究成果

線形商族の各ファイバーは，商ファイバー定理より，一般ファイバーの固定化部分群による商である．したがって，線形商族の底空間の，同じ型のファイバーをもつ軌跡に沿った滑層分解は，固定化部分群(の共役類) が一定の軌跡への分解である．
その成分の間の包含関係つまり隣接関係は，ポセット(部分順序集合) により記述される．このポセット(合地脈ポセット) と各成分の次元を決定するのが目標となる．これらを決定するアルゴリズムを与えたのが平川亮太氏との共著論文(投稿中)である．
おおまかに，次の方針をとった:
1．決定の手順はまず合地脈ポセットを固定化部分群(の共役類) ポセットと向きを逆にする同形であることを示す(幾何的ガロア対応)．幾何的ポセットを代数的ポセットへと翻訳して，
計算がしやすい設定へと持ち込むのがポイントである．
2．固定化部分群ポセットの決定は，まず J.Neubüser によるアルゴリズムを用いて部分群ポセットを作成し，そのポセットの中の内で固定化部分群を求める．そうすると，その部分ポセットとして固定化部分群ポセットが得られる．そのための固定化部分群の簡単な判定法を与えた．

以上のアルゴリズムにより，合地脈ポセットの決定は，線形代数と群論・組合せ論的な計算に帰着される．これは計算機に実装でき，機械的に計算が可能となる．実際，計算機ソフト GAP 上でこのアルゴリズムを実装した．

標準商族の合地脈ポセットから，モジュライ空間の中での，特異軌跡たちの交差の様子を読み取ることができる．さらに，モジュライ空間の大域的な特異軌跡の計算結果(例えば種数 3 の場合 H.Babu-P.Venkataraman)と我々の計算結果を組み合わせると，特異軌跡が自己交差する点を特定できる．モジュライ空間の大域的な特異軌跡が自己交差点をもつ場合は，その点の定めるリーマン面の自己同型群の中で同形だが非共役な固定化部分群が現れる．
ここで非共役性は「リーマン面の自己同型群の中で」である(一方，写像類群の中では共役である)．写像類群と自己同型群との中での共役性のズレは，ある点が「大域的な特異軌跡の自己交差点だが，局所的には二つの異なる特異軌跡の交点になっている」ことに対応している．

種数 3 のモジュライ空間の最も‘ 悪い ’特異点(つまり，自己同型群が極大である曲線) のうち，固定化部分群の位数が最大(168)であるクライン曲線に着目し，線形商族を用いてこの点の周辺の普遍族を描写した.クライン曲線の自己同型群 PSL2(F7)の標準表現は 6 次元既約表現であり，その部分群たちは 15 個の共役類をなす．このうち 8 個が標準表現の非自明な固定化部分群として現れることを示し，標準商族の底空間の中でそれぞれに対応する特異点集合とその配置を描写した．さらに，底空間の特異点の上に現れる‘ 折り畳まれた ’ 特異ファイバーたちがどうつぶれていくかを描写し，それを元に全空間の特異点集合の配置も描写した.
さらに，標準商族との比較のために，同じクライン曲線(とその自己同型群 PSL2(F7)) から作られる線形商族として，自己同型群の 1 次ホモロジー群への作用が定めるホモロジー表現から得られるホモロジー商族を描写した．ホモロジー表現は標準表現に比べて固定化部分群の個数が少なく，15 個の部分群の共役類のうち 3 個だけがホモロジー表現の非自明な固定化部分群として現れる．これに伴い，ホモロジー商族の底空間・全空間の特異点集合の配置は標準商族のそれよりも簡素である.
この背景には，ホモロジー表現は標準表現と同じ 6 次元であるものの，互いに複素共役である 2 つの 3 次元既約表現の直和に分解される可約表現であることが効いている．これらの結果は，佐々木建祀郎氏との共著論文にまとめて投稿中である.

また，(種数 2 以上の)リーマン面の線形商族の描写において重要な役割を果たす 2 つの固定化部分群ポセット−線形表現の固定化部分群ポセットと，リーマン面への群作用の固定化部分群ポセット−の決定法をそれぞれアルゴリズムとして与えた.
前者のアルゴリズムは，部分群に生成元を付け加えて得られる群の上昇列をもとに，部分群全体のなすポセットの中でどの部分群が固定化部分群として実現され得るかを次々に判定していく.「生成系の付け加え」の操作で部分群を取り尽くすことを考えるため，巡回部分群たちの中でも極小のもの(つまり固定点集合が極大の元が生成する群)，およびそれらの固定点集合である部分ベクトル空間たちがどのように交わるかが肝である.
後者のアルゴリズムでは，作用の固定化部分群が巡回群に限るため，一般に巡回群の交わりの形で表せないことに留意して，前者の作用とは逆に極大な巡回部分群の固定点集合から順に考える．各巡回部分群を最大元とする群の下降列をもとに，どの部分群が固定化部分群として実現され得るかを次々に判定していく.
これらの結果は，佐々木氏との別の共著論文にまとめて投稿中である.

モジュライ空間およびその上の普遍族の描写において，部分群複体が果たす役割に触発されて導入した「群の高次構造」の研究は，群の「順序付き生成系」の構成や，それを使った群作用の軌道のパラメータ付けなどにも応用があることが判明した.
「群の高次構造」は，部分群積やコセット積からなり，自然にポセットモノイドの構造を持つ.群作用が与えられたとき，このモノイドの作用が自然に誘導されるが，この作用は，点の軌道，軌道の軌道，軌道の軌道の軌道，...というふうになっており，その離散力学系的な側面に興味がもたれる.
さて，部分群積ポセットとコセット積ポセットは，それぞれ部分群ポセットとコセットポセットを 1 次の部分として含む大きなポセットである．位数が比較的小さい群に対し，計算機を使ってそれらのハッセ図を決定し，分岐現象などを見出した.
この観察に基づき，ポセットにおける分岐情報を反映した準単体複体``分岐複体''を構成した.これは，群の新しい幾何的不変量である．この複体は順序複体と補完的な役割を果たすことが期待される．これらの結果をさまざまな分野の研究集会で発表した．今後，論文としてまとめたうえ投稿予定である.
また，平川氏の協力のもと，部分群積およびコセット積の多くの興味深い具体例を見つけることができた.
なお，ポセット・ブローダウンに関する分類定理を示した論文``Blowdown Maps between Subgroup Posets''を出版した.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 TAKAMURA Shigeru	４．巻 45(2)
２．論文標題 Blowdown Maps between Subgroup Posets	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	６．最初と最後の頁 467-499
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3836/tjm/1502179359	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Shigeru Takamura	４．巻 -
２．論文標題 Classification of finite groups with birdcage-shaped Hasse diagrams	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 高村 茂	４．巻 -
２．論文標題 Blowdowns and canonical embeddings of subgroup posets	５．発行年 2020年
３．雑誌名 第18回代数曲線論シンポジウム報告集	６．最初と最後の頁 17-29
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計9件（うち招待講演　9件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 高村 茂
２．発表標題 有限群の「素因数分解」とその幾何
３．学会等名 研究集会「４次元トポロジー」（招待講演）
４．発表年 2022年

１．発表者名 高村 茂
２．発表標題 メタ群論・メタ群作用とそれらの幾何学(1),(2)
３．学会等名 空間の代数的・幾何的モデルとその周辺（招待講演）
４．発表年 2021年

１．発表者名 高村 茂
２．発表標題 メタ群論とポセット幾何
３．学会等名 研究集会「４次元トポロジー」（招待講演）
４．発表年 2021年

１．発表者名 高村 茂
２．発表標題 部分群ポセットの高次化とそれらの間の隣接幾何
３．学会等名 「葉層構造の幾何学とその応用」（招待講演）
４．発表年 2021年

１．発表者名 高村 茂
２．発表標題 群の“メタ構造”に由来する幾何構造について
３．学会等名 「接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺」（招待講演）
４．発表年 2022年

１．発表者名 高村 茂
２．発表標題 Blow up and down of groups and group actions
３．学会等名 研究集会「４次元トポロジー」（招待講演）
４．発表年 2020年

１．発表者名 高村 茂
２．発表標題 Poset-blowdowns and poset-fibrations
３．学会等名 変換群論研究集会（招待講演）
４．発表年 2020年

１．発表者名 高村 茂
２．発表標題 Blowdowns and canonical embeddings of subgroup posets
３．学会等名 代数曲線論シンポジウム（招待講演）
４．発表年 2020年

１．発表者名 高村 茂
２．発表標題 How to geometrize life histories of groups and group actions?
３．学会等名 Pawalowski先生の退官記念および古稀記念研究集会（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2021年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

_

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関