

令和 6 年 6 月 13 日現在

機関番号：32657

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03542

研究課題名（和文）被約でない対数的スムーズ退化上の混合ホッジ構造の研究

研究課題名（英文）Mixed Hodge theory on non-reduced log smooth degenerations

研究代表者

藤澤 太郎 (Fujisawa, Taro)

東京電機大学・工学部・教授

研究者番号：60280385

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,700,000円

研究成果の概要（和文）：セミステイブルを仮定しない一般の（被約でない）対数的スムーズ退化上に混合ホッジ理論を構築することはかなり困難であり、意味ある結果を得るには、対数的スムーズ退化に適切な条件を仮定する必要があることが明らかになった。そこで、対数的スムーズ退化が「完全（exact）」であると仮定して研究を進めた結果、「基底変換」の方法が有効ではないかという見通しを得ることに成功した。

一方、モノドロミー自己同型の固有空間分解と、期待される混合ホッジ構造との関係について、より詳しい研究が必要であるとの認識を得るに至った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

対数的スムーズ退化上に混合ホッジ理論を構築するという目的は、現時点では達成できていない。しかし、この目的を達成するためには、対数的スムーズ退化に「完全性」を仮定する必要があり、完全性を仮定した場合には「基底変換」の方法が有効であろうという方向性を見出したという点、およびモノドロミー自己同型の固有空間分解と混合ホッジ構造の関係についてさらに詳しい研究が必要であることを明確にしたという点に本研究の学術的意義が存するものと考えている。

研究成果の概要（英文）：It turns out that to construct a mixed Hodge theory on a non-reduced log smooth degeneration is a difficult task. So, it is necessary to put some extra condition on the log smooth degeneration. In this research, under the assumption that the log smooth degeneration is exact, I got an expectation that we obtain a desired results for an exact log smooth degeneration by using the base change method, which is used in Steenbrink's paper in 1970's.

On the other hand, I found that the study of the relationship between eigen space decomposition of the monodromy automorphism and the desired mixed Hodge structure is very important.

研究分野：代数幾何学

キーワード：混合ホッジ構造 対数幾何

1. 研究開始当初の背景

2020年度までの研究では、セミステイブルな射影的対数的スムーズ退化の相対対数的ドラム・コホモロジー群上に混合ホッジ構造を構成、および混合ホッジ構造のウェイト・フィルトレーションが、いわゆるモノドロミー・ウェイト・フィルトレーションに一致することの証明が概ね完成しており、細部のチェックを待つのみという状況であった。その際、相対対数的ドラム・コホモロジー群上の積構造およびトレース射を適切に定義し、それらがウェイト・スペクトル系列に関して良い性質を持つことを証明することが非常に重要なステップであることが分かっていた。

2. 研究の目的

上で述べた状況を踏まえ、より一般の(すなわちセミステイブルを仮定しない)「被約でない」対数的スムーズ退化に対して、上述の結果を一般化することを目標に研究を開始した。すなわち被約でない対数的スムーズ退化の相対対数的ドラム・コホモロジー群上に混合ホッジ構造を構成し、ホッジ・ドラム・スペクトル系列の E_1 退化を証明することが本研究の第一の目的であった。さらに被約でない対数的スムーズ退化について相対対数的ポワンカレ補題を証明できればと期待して研究を行った。

3. 研究の方法

まずは、セミステイブルな場合の手法を、その詳細に渡って整理し精査した上で、必ずしも被約出ない場合にも適用できるように修正を加えることから始めた。被約でない対数的スムーズ退化の「被約化」に対して、セミステイブルな場合の手法を適用し、さらに元の対数的スムーズ退化の相対対数的ドラム・コホモロジー群と、その被約化の相対対数的ドラム・コホモロジー群を比較することによって目的の結果(混合ホッジ構造の構成)が得られるのではと期待していた。

しかし、セミステイブルを仮定しない場合には、以前の手法だけでは上手く機能しないことが次第に明らかになった。セミステイブルを仮定しない場合、対数的スムーズ退化の既約成分の次元が一定ではないことから、トレース射の定義が非常に難しくなることが明らかになった。そこで2021年度以降は、対象とする対数的スムーズ退化に「完全(exact)」という仮定を付けた上で研究するという方法を採用した。完全性を仮定することにより、既約成分の次元は一定になり、何も仮定しない場合に比べ、セミステイブルな場合に近づく。本研究では、以降「完全性」の仮定を置いて研究を進めることとした。

実際、完全な対数的スムーズ退化は、「重複度を許した」セミステイブルな対数的スムーズ退化であることが、容易に示される。これは1970年代から80年代にかけて、スティーンブリックやエルザインによって研究されていた対象、すなわち複素多様体から単位円板への射で、原点のファイバーが重複度を許した単純正規交叉因子になるようなものを対数幾何の立場から一般化したものに他ならない。それに鑑み、本研究への応用を可能とすべく、彼らの論文を精査し、対数幾何の枠組みで捉え直すことを試みた。スティーンブリックの論文に倣えば、このような対象に対しては「基底変換」によって(商特異点をもった)セミステイブルな対数的スムーズ退化の場合に帰着されることが期待できる。そこで、「基底変換」の手法を用いて研究を進めた。

4. 研究成果

対数的スムーズ退化上にホッジ理論を構築する、という本研究の目的から、考察の対象である対数的スムーズ退化は射影性、または適切な意味でのケーラー条件を満足するものと仮定し、特に必要のない限りこの仮定について言及しないものとする。

まず、セミステイブルな対数的スムーズ退化について、従前の結果を整理し、正確な定式化を与え、その上で論文としてまとめた。これによりセミステイブルな対数的スムーズ退化については、ほとんど満足できるレベルにまで理論が構築されたと言ってよい。ただし、相対対数的ドラム・コホモロジー群上の積およびトレース射が、実際に混合ホッジ構造の偏極を与えることの証明等、幾つかの問題が残されている。これらは今後の研究課題であろう。

一方、セミステイブルであると仮定しない、一般の(被約とは限らない)対数的スムーズ退化については、その相対対数的ドラム・コホモロジー群上に自然な混合ホッジ構造を構成することは、かなり難しい問題であり、対数的スムーズ退化に何らかの仮定を課すことなしには、意味ある結果を導くことは困難であるということが、本研究を進める中で明らかになってきた。このような認識のもと、本研究では、対数的スムーズ退化に「完全性」の仮定を課して研究を進めた。

上述したように、完全な対数的スムーズ退化は「重複度を許した」セミステイブルな対数的スムーズ退化に他ならず、これはスティーンブリックやエルザイン等によって研究されていた対象を対数幾何の枠組みで捉え直し、一般化したものである。スティーンブリックの論文の中で用いられた「基底変換」の方法について詳しく検討し、それを対数幾何の言葉で書き直す作業を行った。その内容は藤野修京都大学教授との共著論文("Variation of mixed Hodge structure

and its application” arXiv:2304.00672) の Section 7 にまとめた。(現在投稿中)これによれば、基底変換の方法が、完全な対数的スムーズ退化に関する混合ホッジ理論を構築する上で、かなり上手く機能するのではないかという見通しを得ることができた。これは今後研究を進める上での、一つの指針となる成果と言ってよいであろう。しかし、現時点では指針を得た段階にとどまっており、決定的な成果を得るには至っていないため、今後も継続して研究を進めることが望まれる。

一方、完全な対数的スムーズ退化の相対対数的ドラム・コホモロジー群がもつモノドロミー自己同型は、一般にはべき単 (unipotent) ではなく、準べき単 (quasi-unipotent) であるに過ぎない。ホッジ構造の変動 (variation of Hodge structure) の一般論によれば、モノドロミー自己同型がべき単でない場合には「べき単部分 (unipotent part)」を考える必要があることが示唆されているが、本研究を進める中で、実際に「べき単部分」を考え流必要がある例を構成することに成功した。ささやかな結果ではあるが、実際に明確な例が挙げられているケースは少なく、これも一つの成果ではないかと考える。

混合ホッジ構造を得るには「べき単部分」を考える必要があるという事実は、基底変換を用いる上述の方法と一見したところでは、上手く整合しない。これ等の事実を正当化するためには、相対対数的ドラム・コホモロジー群上のモノドロミー自己同型の固有空間分解と、期待される混合ホッジ構造との関係について、より詳細な研究が必要であつことが明らかになった。こちらも今後の研究の指針として、意味ある結果であるものと考えている。

一方、相対対数的ポワンカレ補題については、以前の研究結果を適用することで証明可能であることを確認した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Taro Fujisawa	4. 巻 63
2. 論文標題 Limiting mixed Hodge structures on the relative log de Rham cohomology groups of a projective semistable log smooth degeneration	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 517--577
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1215/21562261-10607345	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Taro Fujisawa
2. 発表標題 Geometric polarized log Hodge structures on the standard log point
3. 学会等名 Emmy-Noether-Seminar（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

6. 研究組織

氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------