

令和 6 年 6 月 11 日現在

機関番号：3 2 6 7 0

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2023

課題番号：2 0 K 0 3 5 4 4

研究課題名（和文）adelicベクトル束を用いた代数幾何符号の研究

研究課題名（英文）Research on the algebraic-geometric codes based on adelic vector bundles

研究代表者

中島 徹（NAKASHIMA, Tohru）

日本女子大学・理学部・教授

研究者番号：2 0 2 4 4 4 1 0

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000 円

研究成果の概要（和文）：誤り訂正符号は現代の情報通信に於いて不可欠な技術であり、その中でも代数多様体を用いた代数幾何符号は高い訂正能力をもつ。当課題では、adelic曲線とその上のベクトル束を用いてadelic符号と呼ばれる新しい型の代数幾何符号を構成し、その諸性質についての研究をおこなった。その結果、適当な仮定の下でadelic符号の最小距離や次元などのパラメーターを決定し、幾つかの具体例で詳細な性質を調べた。また、正標数の体上のベクトル束のasymptotic minimal slopeとadelic符号との関係を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

当研究によって、有限体上の代数多様体と算術的多様体から定義される異なるタイプの代数幾何符号達をadelic符号の観点から統一的に理解するための枠組みを与えることができた。この結果は代数幾何符号の対象を大幅に拡大していくことを可能にするという点で重要な意義をもつものと考えられる。また、当研究ではasymptotic minimal slopeという正標数のベクトル束に固有の不変量を用いて符号のパラメーターを評価する新しい手法を開発できた。今後この手法を更に発展させることによって従来より高い性能をもつ誤り訂正符号が構成できれば情報通信の分野への応用が期待される。

研究成果の概要（英文）：The error-correcting code is an indispensable technology in the modern transmission of information. Among them, the algebraic geometric code has very high ability of error correction. In this project, we made a research on a novel type of algebraic geometric code called adelic code which is based on the adelic curves and vector bundles on them. As a result, under suitable assumptions we could determine the parameters of these adelic codes such as minimum distances or dimensions and investigated detailed properties of them in some concrete examples. We also clarified the relation between asymptotic minimal slopes of vector bundles in positive characteristic and adelic codes.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数幾何符号 ベクトル束 adelic曲線

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 有限体上のベクトル空間の部分空間として定義される線形符号は通信の過程で生じた誤りを訂正する能力をもち、現代の情報通信には欠かせない技術である。中でも代数曲線上の直線束を用いて定義される Goppa 符号は、非常に高い漸近的性能をもつことが知られている。当研究の代表者である中島はこれまでベクトル束の手法を用いた Goppa 符号の一般化の研究に取り組んできた。

(2) 平成 21 年度から平成 23 年度の期間に科研費補助金基盤(C)(一般)の補助を受けて、直線束を高階のベクトル束で置き換えた Savin 符号についての研究を行った。この研究では、有限体上定義された高次元の射影多様体上のベクトル束の切断の有限個の有理点での評価写像の像として定義される高次元 Savin 符号を導入し、その基本的性質を明らかにした。平成 24 年度から平成 27 年度の期間では科研費補助金基盤(C)(一般)の補助を受けて算術的曲線上のエルミートベクトル束から定まる算術的 Savin 符号の研究を行った。その結果、安定性を仮定することによって符号のパラメーターの計算に成功した。平成 28 年度から令和元年度の期間には、科研費補助金基盤(C)(一般)の補助を受けて代数多様体の因子へのベクトル束の制限写像によって定義される新しい代数幾何符号の研究を行った。

(3) (2)で述べた研究に於いて中島が導入した代数幾何符号相互にどのような関係があるかはこれまで明らかになっていなかった。一方、最近になって体上のすべての付値の情報を考慮した新しい幾何学として、adelic 曲線とその上の adelic ベクトル束の概念が Chen-森脇によって導入された。adelic ベクトル束は有限体上のベクトル束と算術的曲線上のエルミート束を一般化するものであることから、adelic ベクトル束を用いれば従来の中島の研究で考察した代数幾何符号達を統一的に一般化することができるのではないかとこの着想に至った。そこで当研究では、adelic ベクトル束から定義される新しいタイプの代数幾何符号として adelic 符号を導入し、その性質についての研究を行うことにした。

## 2. 研究の目的

当研究では、adelic 符号に関して以下に述べる課題を解決することを目的とした。

### (1) adelic 符号のパラメーターの決定

当研究の対象である adelic 符号の概念を代数幾何の手法を用いて数学的に厳密に定義することを最初の課題とした。次に adelic 符号の次元、最小距離などのパラメーターを定義し、それらの間に成立する不等式(限界式)を証明することを計画した。

### (2) adelic 符号の具体例の研究

特殊な adelic 曲線から定まる adelic 符号についての研究を行うことを計画した。まず、第一の研究対象は偏極多様体型 adelic 符号である。これは非特異射影多様体  $X$  とその上の豊富因子  $H$  が与えられたとき、 $H$  との交点数から定まる測度によって  $X$  の関数体を adelic 曲線と見做して得られる符号であり、中島によって考察されたベクトル束の因子への制限から定まる一般 Savin 符号の拡張になっている。第二の対象として算術的多様体型 adelic 符号を考察することを計画した。これは算術的多様体上の adelic ベクトル束の順像から定義される符号であり、算術的曲線とその上のエルミートベクトル束から定まる算術的 Savin 符号の一般化となっている。

### (3) adelic 符号の漸近的性質の解明

adelic 符号の無限列のパラメーターの漸近的挙動を解析し、符号の性能を評価することを計画した。特に、符号化率と相対最小距離が共に正の値に収束するような良い漸近的性質を備えた adelic 符号の列が構成できるかどうかを検証することを重要な課題とした。

## 3. 研究の方法

当研究では、2.で述べた目的を達成するために以下の様な方法を用いて研究を実施した。

### (1) 弱安定性

曲線上の Savin 符号の場合には、ベクトル束の任意の部分直線束の次数が slope で上から抑えられるという弱安定性の概念を用いて最小距離や次元などのパラメーターの計算が可能である。当研究では、adelic ベクトル束に対しても弱安定性の定義を拡張することによって符号のパラメーターを評価することを計画した。

### (2) asymptotic minimal slope

正標数の体上のベクトル束の半安定性は一般にはフロベニウス写像による引き戻しで保たれないが、A.Langer は十分大きな回数の引き戻しの minimal slope のある種の極限として asymptotic minimal slope を定義し、半安定束の有界性を証明した。一方、曲線上のファイバー構造をもつ射影多様体  $X$  上の直線束  $L$  の順像の asymptotic minimal slope によって  $X$  上に標準的な方法で nef 因子が構成できることが最近 Fulger-村山によって証明されている。当研究では、この結果を用いて  $L$  と nef 因子との交点数から adelic 符号のパラメーターを計算することを計画した。

### (3) Seshadri 定数

ベクトル束の正值性を測る尺度として Seshadri 定数は重要な役割を果たすことが知られている。

S.Hansen は、高次元射影多様体上の直線束の Seshadri 定数を用いて符号の最小距離の評価式を証明した。この結果を一般化し、adelic ベクトル束から定義される符号のパラメーターを計算するために Seshadri 定数を利用することを計画した。

#### (4) Bogomolov-Gieseker 型不等式

非特異射影多様体上の安定ベクトル束のチャーン類に対して Bogomolov-Gieseker 型不等式が成立すれば、符号の存在に関する必要条件を求めることができる。当研究では、H.Sun によるコホモロジー群の消滅定理を A.Langer の制限定理と組み合わせることで Bogomolov-Gieseker 型不等式を証明することを計画した。

### 4. 研究成果

当研究では、3. で述べた方法を用いて研究を実施し、以下の様な成果を得た。

#### (1) adelic 符号のパラメーターの決定

まず、adelic 符号の厳密な数学的定式化を行った。具体的には、Chen-森脇の意味での adelic 曲線上に adelic ベクトル束  $E$  が与えられたとき、 $E$  の算術的切断を非アルキメデスの絶対値の有限集合で評価することによって adelic 符号を定義した。更に adelic ベクトル束が弱安定性条件を満たすという仮定の下で最小距離の下からの評価式を得た。

#### (2) 偏極多様体型 adelic 符号の最小距離

曲線上のファイバー構造をもつ射影多様体  $X$  上の直線束  $L$  から定義される符号のパラメーターを考察した。そのためにまず曲線上の一般のベクトル束の asymptotic minimal slope に対して成立する評価式を確立した。この結果を  $L$  の順像として得られるベクトル束  $E$  に対して適用することにより、 $E$  の不変量を用いて符号の最小距離の下からの評価式を求めた。この評価式はベクトル束に対して  $p$ -安定性の仮定を必要としないため、中島による過去の研究で得られた射影束やグラスマン束上の符号に関する結果を大幅に改良することができた。

#### (3) 旗束と超曲面束から定義される符号の最小距離

(2) で得られた結果を用いて、幾つかの具体的な射影多様体から定まる符号の性質について研究を行った。まず曲線上の階数  $n$  のベクトル束に不随するタイプ  $(1, n-1)$  の旗束とその上の直線束から定まる符号に対してその次元と最小距離を決定した。この結果は Rodier による旗多様体から定義される符号の結果を用いて証明される。また Couvreur による超曲面上の因子の有理点に関する定理を用いて、射影空間の超曲面をファイバーとする射影多様体から定義される符号に対する最小距離の評価式も証明することができた。

#### (4) Seshadri 定数による最小距離の評価

任意次元の非特異射影多様体上の任意の豊富ベクトル束  $E$  から定義される符号に対して、 $E$  の Seshadri 定数を用いて高次元 Savin 符号の最小距離の下からの評価式を得た。この結果は S.Hansen によって直線束の場合に得られていた結果の一般化になっている。高次元 Savin 符号のパラメーターの評価式は当研究に於いて初めて得られたものであり、Seshadri 定数の符号理論に於ける有用性を示唆している。

#### (5) 符号の漸近的性質

2 以上の任意の整数  $r$  に対して、曲線上の階数  $r$  のベクトル束から定義される Savin 符号の無限列で、漸近的に良い性質をもつものが存在することを証明した。この結果は、与えられた階数と次数をもつ弱安定束の存在定理と Garcia-Stichtenoth による曲線族を用いて証明される。これまで漸近的に良い代数幾何符号の列は曲線から定義されたものだけであったが、この結果は高階のベクトル束を用いても性能の高い符号を構成することが可能であることを示すものである。

#### (6) 半安定層のコホモロジー次元の評価式

標数 0 の閉体上定義された  $n$  次元の非特異射影多様体上の半安定層の  $n-1$  次コホモロジー群の次元に対して、上からの明示的评价式を得た。このタイプの結果は、3 次元の場合には既に中島によって得られていたが、A.Langer による制限定理と次元に関する数学的帰納法を用いて 3 次元の場合に帰着させることによって証明を行った。この結果の系として、4 次元射影多様体上の半安定束の 4 次チャーン類に対する Bogomolov-Gieseker 型不等式が導かれる。

#### (7) 研究の位置づけと今後の展望

当研究の成果によって、中島がこれまで研究してきた有限体上の一般 Savin 符号と算術的曲線符号を統一的に理解する枠組みを構築することができた。また、近年の正標数のベクトル束の研究に於いて重要な役割を果たす asymptotic minimal slope と符号理論の関係を明らかにできたことは画期的な結果と考えられる。以前の中島による研究ではベクトル束から定まる符号の研究ではベクトル束に  $p$ -安定性という極めて強い条件の下で符号のパラメーターを評価していたが、asymptotic minimal slope を用いることによって  $p$ -安定性の仮定が不要になり、符号の構成に大幅な自由度がもたらされたからである。更に、これまで殆ど解明されていなかった高次元 Savin 符号のパラメーターに対する評価式が Seshadri 定数を用いて与えられたことは、代数幾

何符号に於けるベクトル束の重要性を示唆するものである。以上述べたことから、今後 adelic 幾何の観点を用いることによって代数幾何符号の理解を更に深めてゆくことが可能になると期待される。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Tohru Nakashima	4. 巻 228
2. 論文標題 Seshadri constants and AG codes of vector bundles	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jpaa.2024.107720	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tohru Nakashima	4. 巻 95
2. 論文標題 AG codes on flag bundles over a curve	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Finite Fields and Their Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.ffa.2024102392	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tohru Nakashima	4. 巻 12
2. 論文標題 Cohomology bound and Chern class inequalities for stable sheaves on a smooth projective variety	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Indian Journal of Pure and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s13226-022-00297-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------