

令和 6 年 6 月 18 日現在

機関番号：32678

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03545

研究課題名（和文）Drinfeld保型形式の傾斜

研究課題名（英文）Slopes of Drinfeld modular forms

研究代表者

服部 新（Hattori, Shin）

東京都市大学・理工学部・准教授

研究者番号：10451436

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究ではDrinfeld保型形式の傾斜の数論について研究を行った。Drinfeld保型形式は楕円保型形式の関数体類似であるが、その数論についてはまだ分かっていないことが多い。最大の成果はレベル  $1(t^n)$  のDrinfeld尖点形式の空間における傾斜0部分にすべてのHecke作用素が自明に作用することを示したもので、これは1980年代に提出されたGekelerの問いに対する否定的回答を与える。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究で得られた傾斜0部分へのHecke作用の自明性は楕円保型形式では知られていない、Drinfeld保型形式特有の現象である。また、楕円保型形式で成立している弱重複度1と呼ばれる性質が重さを固定してもDrinfeld保型形式では成立しない、ということもここから従う。本研究成果はこのように、楕円保型形式にないDrinfeld保型形式の特異性を明らかにしたという点で意義深いものである。

研究成果の概要（英文）：In this research project I studied arithmetic of slopes of Drinfeld modular forms. Among others, I proved the triviality of the Hecke action on the space of Drinfeld cusp forms of level  $1(t^n)$ . This is a negative answer to a question of Gekeler stated in 1980s.

研究分野：数論

キーワード：Drinfeld保型形式 傾斜 D楕円層

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

有限体  $F_q$  上の一変数有理関数体  $F_q(t)$  が代数体と性質がよく似た数論的对象であることは 20 世紀初頭から認識されていた。上半平面や合同部分群の概念も関数体側に適切に一般化される。これらを用いて楕円保型形式の類似を関数体側で定義したのが Drinfeld 保型形式である。Drinfeld 保型形式は楕円保型形式と多くの性質を共有しており、楕円保型形式で高度に発展している  $p$  進理論もパラレルに移植できるだろう、というのが当初の期待だったが、最近の研究では、楕円保型形式の研究において指導原理としての役割を果たしていた、固有値多様体などの  $p$  進解析的族の理論は、Drinfeld 保型形式では成立しないと考えられている。それにも関わらず、数値計算により Drinfeld 保型形式の傾斜にまつわる興味深い現象が多数報告されていた。その代表的なものが以下の三つである。

#### (1) 傾斜の周期性

Drinfeld 保型形式に現れる傾斜は重さごとに周期数列をなすようだ。

#### (2) 肥田族の自明性

レベル  $-1(t^n)$  の Drinfeld 保型形式の傾斜 0 部分には Hecke 作用素が自明に作用するようだ。

#### (3) 特殊固有値

特定の傾斜を持つ  $U_t$  固有値の中に、ミステリアスな方法で記述できるものがあるようだ。

これらの現象は Drinfeld 保型形式の  $P$  進理論に潜む何らかの秩序を示唆しているが、その全容はまだ良く分かっていない。楕円保型形式の場合、傾斜の持つ強い構造は  $p$  進解析的族の存在と深く関連し、それによって説明されることもあるが、Drinfeld 保型形式の場合は解析的族の存在は期待できず、これらの現象の由来がまったくの謎である。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、研究開始当時未解決だったこれらの三予想を証明し、それによって Drinfeld 保型形式に潜む  $P$  進的な秩序のありかを明らかにすることだった。

### 3. 研究の方法

研究目的遂行のため本研究では、これまで関数論的手法で主に調べられてきた Drinfeld 保型形式の理論に  $P$  進数論幾何的な手法を導入して研究を進めた。Drinfeld 保型形式の  $P$  進的合同的理論や  $P$  進連続族の理論、Drinfeld モジュラー曲線の幾何、Boeckle による Hecke クリスタルの理論、円環留数の理論などの  $P$  進数論幾何的な手法によってこれらの予想の解決を目指した。

### 4. 研究成果

大きな研究成果としては、肥田族の自明性の証明に成功し、学術誌に掲載されたことが挙げられる。手法としては私が以前の研究で得ていた Drinfeld 保型形式の合同的理論を用いて重さ 2 の場合に帰着する、という  $P$  進数論幾何的手法が効を奏し、最終的には、有限  $p$  群の標数  $p$  の代数閉体上の既約表現は自明になる、という事実がキーポイントとなった。レベル  $-1(t)$  の場合は私の以前の論文で証明を与えており、レベル  $-1(t^2)$  の場合は一般化の難しい組み合わせ論的な議論で証明を与えていたが、一般の場合の証明にそのような有限群の表現論が鍵になるというのは予想外のことだった。

楕円保型形式では、固有形式は定数倍を除いて Hecke 固有値で決まる、という弱重複度 1 定理が成立する。一方で Drinfeld 保型形式ではそれが成立しないことは以前から知られており、1980 年代に Gekeler は重さを固定した場合に弱重複度 1 が成り立つかという問いを提出した。これに関しても先行研究でいくつかの部分的結果が得られていたが、本研究成果はこの Gekeler の問いに否定的な回答を与えるものである。この研究成果については海外での招待講演も複数回行った。

Drinfeld 保型形式の傾斜 0 部分について、肥田族の自明性のような何らかの特殊な秩序があるかどうかはまだ良く分かっていない。今後は、重点的な数値計算から始めて、その解明を目指す。

引き続いて傾斜の周期性予想を証明するための幾何学的手法の開発に移り、階数 2 の Drinfeld 加群に対する自己双対の理論を整備する、円環留数や Boeckle のクリスタルの理論を用いる、等の手法を用いて研究を行った。これに関しては、重さ  $k$  の Drinfeld 尖点形式の空間において、旧形式の空間に現れない傾斜が  $(k-2)/2$  であることが証明できた、等の予備的な成果はあるものの、決定的な成果には至らなかった。これに関しては計画当初に想定していた複数の手法がいずれも有効に機能したとは言い難い。特に、Boeckle のクリスタルは重さの情報を含んでおらず、傾斜の大きさの評価のためにはクリスタルに移行せずに Frobenius 構造付き接続層のレベルで重さの情報を取り出す何らかの新しいアイデアが必要になるだろう、という知見を得るに至った。

一方、Drinfeld 加群の自己双対が高次元の場合に適切に一般化されるかどうかはよく分かっていない。本研究では、 $D$  楕円層と呼ばれる Drinfeld 加群の準同型環付きの高次元化に対し、行列式の理論が自己双対の欠如を埋め合わせられることを示し、それを用いて  $D$  楕円層のモジュラー曲線が Hasse 原理の反例の明示的無限族を与える例を構成した（新井啓介、近藤智、Mihran Papikian との共同研究）。この成果については論文を執筆中で、2024 年度中に海外での招待講演を複数回行うことになっている。

Hasse 原理の反例とは、大域体  $K$  上の固有スムーズな代数多様体で、 $K$  の全ての素点での完備化において有理点を持つが  $K$  有理点を持たないようなものことである。 $D$  楕円層のモジュラー曲線における Hasse 原理の無限族の構成は、 $K$  が明示的でないものは先行研究で知られていたが、本研究成果では有理関数体の二次拡大として無限個の  $K$  を明示的に与えた点が新しい。その証明の過程で、局所体上の  $D$  楕円層に関する数論的な性質をいくつか証明しているが、Hasse 原理の反例の構成だけでなく、そういった  $D$  楕円層の局所数論に関する成果もこの分野における今後の研究に対して有意義だろうと思われる。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Hattori Shin	4. 巻 792
2. 論文標題 Triviality of the Hecke action on ordinary Drinfeld cuspforms of level $1(t^n)$	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)	6. 最初と最後の頁 269 ~ 288
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/crelle-2022-0058	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Hattori Shin	4. 巻 22
2. 論文標題 ON A PROPERNESS OF THE HILBERT EIGENVARIETY AT INTEGRAL WEIGHTS: THE CASE OF QUADRATIC RESIDUE FIELDS	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu	6. 最初と最後の頁 1 ~ 72
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S147474802200010X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Hattori Shin	4. 巻 380
2. 論文標題 P-adic continuous families of Drinfeld eigenforms of finite slope	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 107594 ~ 107594
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2021.107594	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Hattori Shin	4. 巻 232
2. 論文標題 On the compactification of the Drinfeld modular curve of level $1(n)$	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 75 ~ 100
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jnt.2020.07.015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shin Hattori	4. 巻 103
2. 論文標題 Duality of Drinfeld modules and $\wp$ -adic properties of Drinfeld modular forms	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 35-70
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/jlms.12366	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shin Hattori	4. 巻 2021
2. 論文標題 Dimension variation of Gouvea-Mazur type for Drinfeld cuspforms of level $\Gamma_1(t)$	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 2389-2402
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnz104	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計6件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 Shin Hattori
2. 発表標題 Triviality of the Hecke action on ordinary Drinfeld cuspforms of level $1(t^n)$
3. 学会等名 L-functions and Motives in Niseko 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shin Hattori
2. 発表標題 Triviality of the Hecke action on ordinary Drinfeld cuspforms of level $1(t^n)$
3. 学会等名 One Day Workshop on Arithmetic of Function Fields (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shin Hattori
2. 発表標題 P-adic continuous families of Drinfeld eigenforms of finite slope
3. 学会等名 NCTS Number Theory Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Shin Hattori
2. 発表標題 Triviality of the Hecke action on ordinary Drinfeld cuspforms of level $1(t^n)$
3. 学会等名 NCTS Number Theory Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Shin Hattori
2. 発表標題 Triviality of the Hecke action on ordinary Drinfeld cuspforms of level $1(t^n)$
3. 学会等名 Galois Representations and Automorphic Forms (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Shin Hattori
2. 発表標題 Triviality of the Hecke action on ordinary Drinfeld cuspforms of level $1(t^n)$
3. 学会等名 Number Theory Seminar, University of Pisa (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Shin Hattori's webpage  
<https://www.comm.tcu.ac.jp/shinh/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
トルコ	Middle East Technical University			
米国	Penn State University			