

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 20 日現在

機関番号：10106

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03550

研究課題名(和文)非Cohen-Macaulay環における環論的不変量の相互関係の探求

研究課題名(英文)Study on relationship among ring theoretic invariants for non Cohen-Macaulay rings

研究代表者

松田 一徳 (Matsuda, Kazunori)

北見工業大学・工学部・准教授

研究者番号：20633241

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：多項式環を有限単純グラフのエッジイデアルで割った剰余環に対し、環論的不変量(次元・深度・ $h$ 多項式の次数・Castelnuovo-Mumford正則度・余次元)およびグラフ理論的不変量(マッチング数・最小マッチング数・誘導マッチング数・頂点数・辺の本数)の間に成り立つ相互関係をいくつか見出すことができた。また、Cohen-Macaulay Stanley-Reisner環の次元・Castelnuovo-Mumford正則度・Cohen-Macaulay type の間に成り立つ不等式を見出すことができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

エッジイデアルに関する一連の研究において、グラフ理論に関するいくつかの研究成果を用いた。またその逆に、純粋なグラフ理論の問題を解決し、それを応用してエッジイデアルについての研究成果が出せたこともあった。両分野の結びつきの強さを知らしめるような結果が出せたことに意義を感じる。

研究成果の概要(英文)：For quotient rings of polynomial rings by edge ideals associated with finite simple graphs, we found some relationships between ring-theoretic invariants (dimension, depth, the degree of  $h$ -polynomials, Castelnuovo-Mumford regularity and codimension) and graph-theoretic invariants (matching number, minimum matching number, induced matching number, the number of vertices and the number of edges). Moreover, we also found an inequality for dimension, Castelnuovo-Mumford regularity and Cohen-Macaulay type of Cohen-Macaulay Stanley-Reisner rings.

研究分野：可換環論

キーワード：エッジイデアル 小マッチング数 Stanley-Reisner環 誘導マッチング数 次元 Castelnuovo-Mumford正則度 余次元 マッチング数 最

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

多項式環の斉次イデアルによる剰余環には、標準的度数付き環の構造が入る。標準的度数付き環の環論的不変量は色々あるが、よく知られている不変量として次元・深度・ $h$ 多項式(Hilbert級数の分子の多項式)の次数・Castelnuovo-Mumford 正則度(以下、正則度と略記する)・extremal ベッチ数の個数が挙げられる。上記5種の不変量の間には「次元は深度以上」や「 $h$ 多項式の次数 - 正則度)は(次元 - 深度)以下」という大小関係が成り立ち、特に Cohen-Macaulay 環においては等号関係が成り立つ。さらに、Cohen-Macaulay 環に対し「extremal ベッチ数の個数は1」および「 $h$ 多項式の次数と正則度が一致」が成り立つ。これらの事実から、Cohen-Macaulay 環における5種の不変量の相互関係はよく知られているといえる。言い換えると、非 Cohen-Macaulay 環において5種の不変量の間にはどのような相互関係が成り立つかを探求することは重要な研究課題である。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、非 Cohen-Macaulay 環における前述の5種の不変量(次元・深度・ $h$ 多項式の次数・正則度・extremal ベッチ数の個数)の相互関係を研究することにより、非 Cohen-Macaulay 環の研究の発展に貢献することである。具体的な研究課題として、以下の3課題を設定した。

課題(1)：有限単純グラフに付随するエッジイデアルに対し、グラフ理論的不変量と環論的不変量の相互関係を研究する。

課題(2)：変数の個数が少ない多項式環の単項式イデアルに対し、各不変量の相互関係を研究する。

課題(3)：二項式イデアルに対し、課題(1)・(2)と同様の研究を行う。

### 3. 研究の方法

**2. 研究の目的**で述べた3つの各課題に対していくつかの問題を設定しそれらを解決する、という研究方法をとる。

課題(1)に関する問題：条件「 $h$ 多項式の次数と正則度が頂点数に一致する」を満たす有限単純グラフ、条件「 $(h$ 多項式の次数 - 正則度)が(次元 - 深度)に一致する」有限単純グラフを分類する。また、グラフの誘導マッチング数・最小マッチング数・マッチング数とエッジイデアルの環論的不変量との間の相互関係を研究する。

課題(2)に関する問題：3変数または4変数多項式環の単項式イデアルによる剰余環に対し、正則度と $h$ 多項式の相互関係を決定する。

課題(3)に関する問題：多項式環の二項式辺イデアル(binomial edge ideal)による剰余環や、edge ring 等の有限単純グラフに付随するトーリック環に対し、各不変量の間相互関係を見出す。

### 4. 研究成果

研究期間中の研究成果を以下に述べる。

(1) マッチング数と誘導マッチング数が等しいグラフのうち、スターグラフ(いくつかの2点パスグラフ  $P_2$  を1点でくっつけたもの)でもスタートライアングル(いくつかの三角形グラフ  $C_3$  を一点でくっつけたもの)でもないグラフを Cameron-Walker グラフという。日比孝之氏(大阪大学)、菅野裕樹氏(大阪大学)、木村杏子氏(静岡大学)、Adam Van Tuyl 氏(McMaster 大学)との共同研究において、多項式環の Cameron-Walker グラフのエッジイデアルによる剰余環に対し、グラフの頂点数・次元・深度・正則度・ $h$ 多項式の次数の相互関係を決定した。その他の成果も含めて論文 "Homological invariants of Cameron-Walker graphs" にまとめた。論文は Transactions of American Mathematical Society に掲載された。

(2) Stanley-Reisner イデアルは単体的複体から定まる無平方単項式イデアルであり、エッジイデアルの一般化とみなせるものである。多項式環の Stanley-Reisner イデアルによる剰余環を Stanley-Reisner 環という。東谷章弘氏(大阪大学)と菅野裕樹氏との共同研究において、Cohen-Macaulay Stanley-Reisner 環の次元・正則度・Cohen-Macaulay type の間に成り立つ不等式を見出し、その他の成果も含めて論文 "Inequalities of invariants on Stanley-Reisner rings" にまとめた。論文は Journal of Pure and Applied Algebra に掲載された。

(3) 誘導マッチング数・最小マッチング数・マッチング数はいずれもグラフのマッチングに由来する不変量であり、これら3種の不変量の相互関係については既に解明されている。研究代表者の指導学生であった吉田裕一氏(北見工業大学)との共同研究において、これらの不変量にグラフの頂点数を加えた4種の不変量の相互関係を解明した。この結果を応用して、多項式環のエッジイデアルによる剰余環に対し、グラフの頂点数・正則度・最小マッチング数・マッチング数の相互関係を解明することができた。これらの結果を論文 "On the three graph invariants related to matching of finite simple graphs" にまとめた。論文は Journal of Algebra

Combinatorics Discrete Structures and Applications に掲載されることが決定している。

(4) (3)の研究から派生した「3種のマッチング数が特定の値を持つグラフの頂点数および辺の本数の最小値を求めよ」という問題に取り組んだ。吉田裕一氏との共同研究により、頂点数の最小値については解決でき、辺の本数の最小値についても「誘導マッチング数と最小マッチングが等しい場合」および「誘導マッチング数・最小マッチング数・マッチング数が全て等しい場合」に対して解決することができた。これらの結果をまとめた論文を準備中である。

(5) 多項式環のエッジイデアルによる剰余環の余次元の下限値および上限値を得た。応用として、エッジイデアルが Gorenstein となるグラフの頂点数の上限値を最小マッチング数を用いて与えた。また、「マッチング数と余次元が等しいグラフ」および「マッチング数と(最小マッチング数の2倍)が等しいグラフ」の分類に成功した。グラフ理論に関する先行研究の調査が終わり次第、得られた結果を論文にまとめる予定である。

(6) 才川隆文氏(名古屋大学)と研究代表者の指導学生の辻陽介氏(北見工業大学)との共同研究において、グラフのマッチング理論の Coq による形式化を行った。マッチング・極大マッチング・誘導マッチングの定義、およびマッチング数・最小マッチング数・誘導マッチングの定義とそれらの間に成り立つ不等式の形式化が完了した。独立集合および独立数に関する形式化についても一定の成果を得た。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Takayuki Hibi, Kyouko Kimura, Kazunori Matsuda, Adam Van Tuyl	4. 巻 2
2. 論文標題 The regularity and h-polynomial of Cameron-Walker graphs	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Enumerative Combinatorics and Applications	6. 最初と最後の頁 S2R17, 12 pp.
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.54550/ECA2022V2S3R17	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Takayuki Hibi, Kazunori Matsuda	4. 巻 47
2. 論文標題 Regularity and h-polynomials of binomial edge ideals	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Acta Mathematica Vietnamica	6. 最初と最後の頁 369-374
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40306-021-00416-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Akihiro Higashitani, Hiroju Kanno, Kazunori Matsuda	4. 巻 226
2. 論文標題 Inequalities of invariants on Stanley-Reisner rings of Cohen-Macaulay simplicial complexes	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 106888, 10 pp.
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2021.106888	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Takayuki Hibi, Kyouko Kimura, Kazunori Matsuda, Akiyoshi Tsuchiya	4. 巻 584
2. 論文標題 Regularity and a-invariant of Cameron-Walker graphs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 215-242
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2021.05.007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ayana Hirano, Kazunori Matsuda	4. 巻 37
2. 論文標題 Matching Numbers and Dimension of Edge Ideals	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 761-774
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-021-02277-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hibi Takayuki, Kanno Hiroju, Kimura Kyouko, Matsuda Kazunori, Van Tuyl Adam	4. 巻 374
2. 論文標題 Homological invariants of Cameron-Walker Graphs	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 6559 ~ 6582
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/tran/8416	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計6件 (うち招待講演 4件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 吉田 裕一, 松田 一徳
2. 発表標題 連結単純グラフのマッチングに付随する3種の不変量
3. 学会等名 日本数学会2023年度年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 松田 一徳
2. 発表標題 Gorenstein binomial edge ideals ~arXiv:2102.11188 の論文紹介~
3. 学会等名 特異点セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 松田 一徳
2. 発表標題 Gorenstein graphic matroids
3. 学会等名 オンライン研究集会 組合せ論と可換環論 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 日比 孝之、木村 杏子、松田 一徳、Adam Van Tuyl
2. 発表標題 The regularity and h-polynomial of Cameron-Walker graphs
3. 学会等名 日本数学会2020年度秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 松田 一徳
2. 発表標題 単項式イデアルの環論的不変量の相互関係について
3. 学会等名 日本数学会北海道支部講演会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 松田 一徳
2. 発表標題 Homological invariants of Cameron-Walker graphs
3. 学会等名 東京可換環論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

北見工業大学 研究者総覧  
<http://hanadasearch.office.kitami-it.ac.jp/searchja/show/id/1331>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
カナダ	McMaster 大学			