

令和 6 年 5 月 17 日現在

機関番号：12301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03553

研究課題名(和文)フェルマーの方程式に関連する指数型不定方程式の代数的・解析的研究

研究課題名(英文) Algebraic and analytic study on exponential equations related to Fermat's equation

研究代表者

宮崎 隆史 (Miyazaki, Takafumi)

群馬大学・大学院理工学府・准教授

研究者番号：20706725

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：1より大の互いに素な自然数 $A, B, C$ に対して、純指数型方程式 $A^x+B^y=C^z$ の自然数解 $(x, y, z)$ の個数の一般的な評価について研究を行い、いくつかの成果を得た。初年度には、 $\{A, B\}=\{3, 5\}$ ,  $C=2$ の場合を除いて、方程式は一般に高々二つの解しか持たないことを証明した。これは一般的な最良評価である。残りの年度で、解をちょうど二つ持つ場合を決定する問題を、特に $C$ の値を固定するときに、考察した。この方向では、以前までに知られていたのはR. Scott氏による $C=2$ の場合に決定する結果(1993年)だけであったが、 $C$ が2を含む様な無限個の値を取る場合について、予想を証明する事が出来た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

現れる素因数の種類が始めから有限個に限定されている整数たちの間に成り立つ線形関係式は、整数論においてよく現れ、単数方程式と称される。本研究では、最も単純な単数方程式のいくつかを考察し、その解の個数の最良評価の研究に従事した。得られた研究成果は、「単数方程式は一般に解を持たない」という非常に重要な命題を支持するものである。特に、1より大のどの二つも互いに素な自然数 $a, b, c$ に対し、方程式 $a^x+b^y=c^z$ の自然数解は、 $(a, b, c)=(3, 5, 2)$ ,  $(5, 3, 2)$ の場合を除いて、高々二つであることを証明して、この方程式の解の個数の最良評価を確立した。

研究成果の概要(英文)：For relatively prime positive integers  $A, B$  and  $C$  all greater than 1, I studied general estimates of the number of solutions  $(x, y, z)$  to the purely exponential Diophantine equation  $A^x+B^y=C^z$ , and I obtained some results. In the first year, I proved that there are at most 2 solutions to the equation, except for the case  $\{A, B\}=\{3, 5\}$  and  $C=2$ . This is regarded to be best possible. In the remaining years, I considered the problem of determining all cases with exactly two solutions, especially when fixing the value of  $C$ . In this direction, while the only known result so far was the result solving the case of  $C=2$  by R. Scott (1993), I solved the problem for infinitely many values of  $C$  including 2.

研究分野：整数論、不定方程式

キーワード：指数型不定方程式 単数方程式 プライ型方程式 Bakerの手法 部分空間定理

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

不定方程式あるいはディオファントス方程式とは、通常、フェルマーの方程式に代表される様な「多項式」で表される方程式の整数解を扱うが、累乗数に関する有名な Catalan 予想 (Mihailescu の定理) やフィボナッチ数等の研究で扱われている方程式達には「指数」を変数とする項が自然に現れている。その様な不定方程式の解の構造を明確に記述することは、多くの応用を持ち、重要であると認識されているが、非常に難しい。よってその様な理論を構築することは重要である。特に、解を実効的な方法で記述することは、方程式を完全に解く上で必須となっている。

### 2. 研究の目的

1 より大のどの二つも互いに素な自然数  $a, b$  と  $c$  に対して、純指数型方程式：

$$(abc) \quad a^x + b^y = c^z$$

の自然数解  $(x, y, z)$  を考える。まず、この方程式の解の個数の一般的な最良評価、すなわち、『 $(a, b, c) = (3, 5, 2), (5, 3, 2)$  の場合を除いて、方程式は一般に高々二つの解しか持たないこと』を確立する。次に、2006 年に R. Scott と R. Styer の両氏によって提起された、解をちょうど二つ持つ場合の決定に関する予想について、いくつか特別な場合を考察する。特に、方程式の二変数版であるピライ型方程式：

$$(abcpillai) \quad a^x - b^y = c \quad (a, b \text{ と } c \text{ は既知の自然数})$$

について知られる、M.A. Bennett 氏による有名な研究結果 (2001 年) のいくつかを、方程式 (abc) にまで拡張することを考察する。

### 3. 研究の方法

合同式や三項型の低次不定方程式などを使う初等整数論、フェルマーの最終定理の一般化問題の研究で有効な最先端手法であるモジュラーアプローチ、また、ディオファントス近似論における、対数の一次形式に関するペイカーの理論およびその非アルキメデス付値類似、そして Schmidt の部分空間定理等を用いて、純指数型方程式 (abc) に複数の解が存在する仮定の下で、方程式の解の様々な有限的な情報を導いていく。得られた有限的な情報を用いて、特別な場合を考察し、方程式の解の個数を最良に評価することを考え、有限種類の場合を考察することに帰着させる。コンピュータを用いた適切なプログラムを構築することで、その様な残りの場合をすべて調べ上げ、方程式が解をちょうど二つ持つ場合を決定していく。

### 4. 研究成果

純指数型方程式 (abc) の自然数解  $(x, y, z)$  の個数の一般的な評価について、いくつかの成果を得た。初年度には、『 $(a, b, c) = (3, 5, 2), (5, 3, 2)$  の場合を除いて、方程式は高々二つの解しか持たない』ことを証明した。これは一般的な最良評価である。残りの年度では、解をちょうど二つ持つ場合を決定する問題を考察した。始めに、ピライ型方程式 (abcpillai) について知られる、Bennett 氏による有名な研究結果の一つに着目し、その三変数版、すなわち純指数型方程式 (abc) への拡張の確立に努めた。実際は、その三変数版のみならず、より一般的なことを証明することができた。それを特に  $c$  の値を固定する場合に応用した。この方向では、以前までに知られていたのは Scott 氏による  $c=2$  の場合に決定する結果 (1993 年) だけであったが、 $c$  が 2 を含む様な無限個の値を取る場合についても同様のことを証明する事ができた。さらに、その方法とフェルマー素数の性質を合わせて考察し、 $c$  が既知の (発見されている) フェルマー素数：3, 5, 17, 257, 65537 である場合にも問題を完全に解くことができ、これは前述した Bennett 氏によるピライ型方程式 (abcpillai) に関する別の研究成果の拡張になっている。次に、以上の結果の証明法をより一般的な場合に拡張することに努め、純指数型方程式 (abc) に複数の解が存在する仮定の下で、方程式の解の様々な有限的な情報を導くことができた。その得られた有限的な情報を用いて、Schmidt による有名な部分空間定理の応用も合わせて考えると、 $c$  がある具体的な形をした素数である場合に、Scott-Styer 予想を、高々有限個の場合を除いて、証明することができた。同時に、ピライ型方程式 (abcpillai) の自然数解  $(x, y)$  の個数の評価についても、 $a$  の値を「任意に」固定する場合に、シャープなものを得ることができた。これは 2001 年に Bennett 氏が提起した予想に広く貢献するものである。最後に、前述した  $c$  の値の中で、 $c=13$  の場合だけでなく、特別な代数的数の有理近似式を用いて、例外的な場合をすべて実効的に決定する方法を見

つけだし、そのものたちをコンピュータを使って全て篩い、最終的に Scott-Styer 予想を証明することができた。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Takafumi Miyazaki, Istvan Pink	4. 巻 146
2. 論文標題 Number of solutions to a special type of unit equations in two unknowns	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 American Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 295 ~ 369
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1353/ajm.2024.a923236	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Takafumi Miyazaki, Istvan Pink	4. 巻 10
2. 論文標題 Number of solutions to a special type of unit equations in two unknowns, II	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Research in Number Theory	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40993-024-00524-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Miyazaki Takafumi, Sudo Masaki, Terai Nobuhiro	4. 巻 84
2. 論文標題 A purely exponential Diophantine equation in three unknowns	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Periodica Mathematica Hungarica	6. 最初と最後の頁 287 ~ 298
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10998-021-00405-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計8件（うち招待講演 0件/うち国際学会 5件）

1. 発表者名 Takafumi Miyazaki, Istvan Pink
2. 発表標題 Number of solutions to a special type of unit equations in two unknowns III
3. 学会等名 Diophantine Analysis and Related Fields 2024 (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Takafumi Miyazaki
2. 発表標題 Number of solutions to a special type of Pillai ' s equation
3. 学会等名 解析的整数論とその周辺 ( 2023年度RIMS共同研究 ( 公開型 ) ) ( 国際学会 )
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Takafumi Miyazaki
2. 発表標題 Number of solutions to a special type of Pillai ' s equation
3. 学会等名 25th Central European Number Theory Conference ( 国際学会 )
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Takafumi Miyazaki
2. 発表標題 Number of solutions to a special type of unit equations in two unknowns II
3. 学会等名 Number Theory Conference 2022 ( 国際学会 )
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takafumi Miyazaki
2. 発表標題 Number of solutions to a special type of unit equations in two unknowns II
3. 学会等名 NUMBER THEORY SEMINAR ( Number Theory Research Group University of Debrecen )
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 宮崎 隆史
2. 発表標題 純指数型不定方程式 $a^x+b^y=c^z$ の解の個数について
3. 学会等名 日本数学会2021年度秋季総合分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 宮崎 隆史
2. 発表標題 三変数の純指数型不定方程式に関するScottの定理について
3. 学会等名 2021大分整数論研究集会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takafumi Miyazaki
2. 発表標題 Number of solutions to some purely exponential Diophantine equation in three unknowns
3. 学会等名 2021年度RIMS共同研究（公開型）解析的整数論とその周辺（国際学会）
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ハンガリー	University of Debrecen	Institute of Mathematics		
ハンガリー	University of Debrecen	Institute of Mathematics		
ハンガリー	University of Debrecen	Institute of Mathematics		
ハンガリー	University of Debrecen	Institute of Mathematics		