

令和 5 年 6 月 20 日現在

機関番号：94305

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2022

課題番号：20K03560

研究課題名（和文）量子相互作用と数論・表現論・離散力学系

研究課題名（英文）Quantum Interaction and number, representation theory, discrete dynamics

研究代表者

若山 正人（Wakayama, Masato）

日本電信電話株式会社NTTコミュニケーション科学基礎研究所・メディア情報研究部・数学研究プリンシパル

研究者番号：40201149

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：本課題の量子相互作用として、非可換調和振動子（NCHO）、量子ラビ模型（QRM）、非対称量子ラビ模型（AQRM）を扱った。なお各々の Heine ODE 描像に着目すると、特異点の合流により NCHO は QRM の被覆と見做せる。成果は、NCHO のスペクトルゼータ関数の特殊値の数論研究（保型形式、楕円曲線族、Eichler 形式の一般化とそのコホモロジー、アペリ数類似）。AQRM の縮退の記述と隠れた対称性の研究及び両者を結び予想の提出。QRM の熱核・分配関数の、無限対称群の表現論・関数解析・有限体  $F_2$  上の  $SL_2$  の責の oscillator 表現、グラフ理論を用いた導出、となる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

量子光学や固体物理において光と物質の最も基本的な相互作用を記述するモデルであり、超伝導を用いた qubit を作る実験結果を予測していた量子ラビ模型及び非対称ラビ模型は、量子情報科学において量子計算機作りにも深く関係しているが、その背後にある数論や表現論・幾何学的構造を（一部分ではあるが）具体的に見出す研究を行った。これは、物理と数学を結びつける一つの意義深い成果であるとともに、ここでの数学解析が、量子情報科学の発展に幾許かの寄与がなされる点で、学術的意義は大きい。

研究成果の概要（英文）：Non-commutative harmonic oscillators (NCHO), quantum Rabi models (QRM), and asymmetric quantum Rabi models (AQRM) are treated as quantum interactions in this project. Focusing on each Heine ODE picture, NCHO can be regarded as covering his QRM due to the confluence of singularities. The results are as follows: (1) Arithmetic research on special values of NCHO's spectral zeta function (automorphic forms, family of elliptic curves, generalizations of Eichler forms and their cohomology, congruences of Apelli-like numbers). (2) Description of degeneracy of AQRM, research on hidden symmetry, and proposal of conjectures linking the two. (3) Derivation of the heat kernel and partition functions of QRM by representation theory of infinite symmetric groups, function analysis, the oscillator representation of the  $SL_2$  on the finite field  $F_2$ , and graph theory.

研究分野：数学

キーワード：非可換調和振動子 量子ラビモデル 保型形式 熱核 無限対称群 スペクトルゼータ関数 特殊値 楕円曲線

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

従来研究において、すでに、非可換調和振動子のスペクトルゼータ関数の特殊値の解析を通して、非可換調和振動子の背後にある豊かな数論的対象が発見され、多くの研究テーマが生まれてきていた。その数論的内容はおそらく深いものであると思われたが、そこで明らかにされている断片的な事実はきわめて非自明なものであった。実際それらは、表現論における研究対象を広げ、新しい数論的研究対象も多く窺えるものであった。したがってこれらの点を、更なる数論研究を進めることで明らかにしていくべき時期にあった。またさらに、近年の量子情報科学における量子相互作用の理論モデルの深化にも極めて深く関係することもわかりつつあり、非可換調和振動子のスペクトルの研究は、そこへの応用も期待されていた。

## 2. 研究の目的

上述の点を、現在までに、かすかに接点が見えてきているグラフ理論・離散力学系の観点も取り入れながら明らかにしていくこと第一の目的である。第二の目的は、量子光学・量子情報科学の理論的基礎となっている量子ラビ模型のスペクトルに関し、ようやく得られた熱核の解析的表示および、その過程で行った研究を通して、対応するゼータ関数の特殊値を通じての数論的研究を進めることである。なお、(一般化された)非可換調和振動子は、量子ラビ模型の被覆であるとみなせるので、そこでの数論的研究には大いなる期待がある。さらに分配関数(熱核のトレース)を介して、数論と量子相互作用の関係を観察していきたい。

## 3. 研究の方法

表現論、数論、数理物理関連の研究集会や国際会議での講演を行うとともに、情報交換を行う。また、非可換調和振動子のスペクトルの背後にある数論研究については木本一史(琉球大学理学部)との、さらに量子相互作用、特に量子ラビ模型については Cid Reyes-Bustos (当時、東工大、現在 NTT)との共同研究を進めた。加えて、国内外の関係する数学者(特に、廣島文生(九州大学)、Alberto Parmeggiani (Univ. Bologna))や理論物理学者(特に Daniel Braak (Univ. Augsburg), Murray Batchelor (ANU))らとの意見交換や共同研究も推進した。

## 4. 研究成果

目的としていた非可換調和振動子のスペクトルゼータ関数の特殊値から生まれる数論研究を行い、それを進展させるとともに、マーラー測度との関係を導き離散力学系につながる部分的成果を得た。数論研究では、すでに木本と代表者が得ていた  $s=2$  における特殊値の研究(重さ1の(2)保型形式、楕円曲線族、アペリ数の類似物とみなせる有理数たちが持つアペリ数と同様の合同関係式)に加え、 $s=4$  における特殊値と(2) Eichler 形式(の自然な一般化)との具体的関係を概正則保型形式(一般化 Eisenstein 級数微分など)を用いて導くほか、それに付随するコホモロジーなどの研究をおこなった。さらに、偶数( resp. 奇数)の特殊値をわたる母関数が、モジュラーマーラー測度で記述されることも導出したほか、アペリ数の類似物の更なる合同関係式を導いた。これらは、K. Kimoto and M. Wakayama: Apéry-like numbers for non-commutative harmonic oscillators and automorphic integrals, *Annales de l'Institut Henri Poincaré D*, 10 (2023), 205-275 (December 2022, online first). DOI: <https://doi.org/10.4171/AIHPD/129> として公開した。

量子ラビ模型(QRM)とそれにある種の自然なバイアスが加わった非対称量子ラビ模型(AQRM)は、超伝導を使った qubit 構成実験の測定結果(F.Yoshihara et al, *Nat.Phys.* 2917, PRL 2018)を予言するなど、極めて重要な理論モデルと考えられている。バイアスの存在により AQRM は QRM (のハミルトニアン) が持つパリティ対称性を持たないため、従来は、QRM が持つエネルギー縮退は存在しないと考えられていた。ところが、Z.M.Li, M.T. Batchelor (*J.Phys.A.* 2015)により、バイアスのパラメータが  $1/2$  の時には、縮退固有値が存在するという数値結果を得ていた。それについて数学的証明を与え、一般にバイアスのパラメータが半整数の時には退が起るとの予想を代表者は提出していた(2017年)。論文 K. Kimoto, C. Reyes-Bustos, and M. Wakayama: Determinant expressions of constraint polynomials and the spectrum of the asymmetric quantum Rabi model, *International Mathematics Research Notices*, 2021:12, 9458-9544. DOI: <https://doi.org/10.1093/imrn/rnaa034> では、その予想を完全に解決し、その

背後にある表現論的理解を進めた。その後、このこと（縮退の存在）から、たとえ AQRM のハミルトニアンには明かな対称性がなくとも、その背後には隠れた対称性があると物理学者らは確信し、いくつかの関係論文が出版されていた(e.g. S. Ashhab, Phys. Rev. A 2020)。そうしたなか、V.V.Mangazeev, M.T.Batchelor, V.V.Bazhanov らが、バイアスのパラメータが  $1/2, 1$  の時に、ハミルトニアンと可換な作用素を発見した(J. Phys. A, 2021)。その上で当該論文での大きな発見は、その作用素の平方が、ハミルトニアンが多項式で表せていることであった。このことが一般の半整数に対して成立することを証明したのが、Reyes-Bustos と Daniel Braak との論文、C. Reyes-Bustos, D. Braak and M. Wakayama: Remarks on the hidden symmetry of the asymmetric quantum Rabi model, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 54 (2021), 285202. DOI: <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ac0508> である。この研究では、ハミルトニアンと可換な作用素の存在を持って隠れた対称性があると主張したが、縮退スペクトルとの関係については以下の論文で相当部分を明らかにした: C. Reyes-Bustos and M. Wakayama: Degeneracy and hidden symmetry –an asymmetric quantum Rabi model with an integer bias, Communications in Number Theory and Physics, 16, 615-672, 2022. DOI: <https://dx.doi.org/10.4310/CNTP.2022.v16.n3.a4> 実際、スペクトルの縮退が起きるのは、二つの束縛多項式が共通零点を持つことであると言い換えられるが、それはより強く、片方の多項式が他の多項式を割るという形で述べられることを 上記の IMRN(2021)で示していた。この商となる多項式が、実は、ハミルトニアンと可換な作用素の平方をハミルトニアンが多項式で著した時の多項式と一致するという多くの例による観察(計算)と、傍証により予想とし述べたことが、この論文の最大の意義である。なお、この多項式は、自然に超楕円曲線を定め、この予想は、超楕円曲線・曲面の幾何学における問題としても捉えられることがわかる。

上記とは別に、Cid Reyes-Bustos と、QRM の熱核の解析的公式を導き、そのスペクトルゼータ関数の解析接続の周回積分を用いた証明を得た。QRM のスペクトルゼータ関数の解析接続は、非可換調和振動子のその方法(熱作用素の 0 の回りにおける漸近展開の精密評価)を用いて、すでに杉山真吾が 2020 年に証明を得たものであり、ここでの証明は、その別証明にあたる。他方、この熱核の解析的公式は、別の意味で極めて意義深いものと考えられる。一点目は、非自明なハミルトニアンに対して、Feynman-Kac 経路積分などの表示を別として、近似計算にも誤差を評価しながら使える解析的公式が得られたのは、ほぼ初めてのことであること。また 2 点目は、それらは、無限対称群の表現論と深く関係するものであること。さらに、QRM の場合は、すでにそれを含む Spin-Boson モデルの場合に、熱核を Feynman-Kac 経路積分で表示する公式が M. Hirokawa, F. Hiroshima and J. L̄orinczi によって 2014 年 (Math.Z) に得られているが、そこに現れる無限回の符号を制御して、使える解析的公式を得るには、本論文での議論と同程度の effort を必要とすると考えられるものである。これらのことは、二つの論文 C. Reyes-Bustos and M. Wakayama: The heat kernel for the quantum Rabi model, Advances in Theoretical and Mathematical Physics, 5 (2022), 1347-1447. DOI: <https://dx.doi.org/10.4310/ATMP.2022.v26.n5.a8>, C. Reyes-Bustos and M. Wakayama: The heat kernel for the quantum Rabi model II: Propagators and spectral determinants, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 54 (2021), 115202. DOI: <https://doi.org/10.1088/1751-8121/abdca7> で完成した。

また、最終年度には、非可換調和振動子 (NCHO) に適切な非対称項を定め、ホイン微分方程式の特異点合流で、それが非対称量子ラビ模型 (AQRM) のホイン描像に移るような理論の構築を行った。その際に現れるモノドロミー問題を扱い、quasi-exact 解(多項式解)の存在や構造を調べた。かかる研究を行なったのは主に以下の 2 つの動機からである。1) NCHO のスペクトルゼータ関数の特殊値に値する上述の数論研究。2) ホイン描像を通じて、NCHO が QRM の被覆モデルであることは、研究代表者により既に 2015 年の論文で示されていたが、これを、理論・実験においても重要な AQRM に拡張し、さらに、AQRM のスペクトルの背後に存在するであろう数論構造を発見したいと考えたからである。この内容については、Math arXiv に upload し (arXiv:2209.14665 [math-ph], 2022) 研究期間の最後にジャーナルに投稿している。なお、非可換調和振動子に対しては、現時点でもなお、その熱核の解析的公式は得られていない。解決すべき課題である。

なお、これらの研究成果については以下のような講演(招待)をおこなった。

- [1] April 10, 2020, RIKEN iTHEMS Colloquium, RIKEN “Interaction models in quantum optics, representation theory and Number theory”
- [2] 2021. 1.17, 金沢大学理学談話会「スペクトルの縮退と隠れた対称性 - Asymmetric quantum Rabi model を例に」
- [3] 2022.03.04, 理研 iTHEMS Coffee Meeting, “Study on quantum interactions and number theory”
- [4] June 2, 2022, 2022nd - NTT Communication Science basic Research Lab. Open House Lecture “Number Theory and Quantum Physics Based on Symmetry—Themes from Quantum

## Optics

- [5] October 5, 2022, Colloquium, Department of Mathematics, University of Bologna “Quantum Interaction Models and Number Theory, Representation Theory”
- [6] October 19, 2022, French-Japan Web-Seminar on Painlevé equations and related topics “Quantum Interaction and Number Theory, Representation Theory - modular forms a bit beyond, infinite symmetric group, Fuchsian ODE”
- [7] January 18, 2023, RIMS Kyoto University (Workshop on “Fields theory and related Topics”), 16-18 January 2023 “Geometric and algebraic problems on quantum interaction models”
- [8] January 26, 2023, Symposium “Rabi and Spin Boson models” Kyushu University, Fukuoka “Covering of asymmetric quantum Rabi models and possible zeta problems.”
- [9] February 24, 2023, Colloquium, Department of Mathematics, University of Tübingen, “Algebra and geometry for quantum interaction models”
- [10] March 2, 2023, SIAM Computational Science and Engineering 2023, Part of MS302 Mathematics for Industry in the Asia Pacific Area - Part I of II, “Heat Kernels of Quantum Interaction Models for Quantum Computers”
- [11] March 6, 2023, Geometry Seminar, Department of Mathematics, Radboud University Nijmegen “Geometric and algebraic problems on quantum interaction models”.

上記の中で、特に海外大学等での講演の機会を通して、海外の数論研究者らとの情報交換・意見交換を進めた。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kazufumi Kimoto, Cid Reyes-Bustos, Masato Wakayama	4. 巻 2021-12
2. 論文標題 Determinant Expressions of Constraint Polynomials and the Spectrum of the Asymmetric Quantum Rabi Model	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 9458-9544
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/imrn/rnaa034	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kazufumi Kimoto, Masato Wakayama	4. 巻 10
2. 論文標題 Apery-like numbers for non-commutative harmonic oscillators and automorphic integrals	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Annals de l'Institut Henri Poincaré; - D, (2022. Dec. Online first)	6. 最初と最後の頁 205-275
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/AIHPD/129	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Cid Reyes-Bustos and Masato Wakayama	4. 巻 54-11
2. 論文標題 Heat kernel for the quantum Rabi model: II. Propagators and spectral determinants	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 115202-115233
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1751-8121/abdca7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Cid Reyes-Bustos, Daniel Braak and Masato Wakayama	4. 巻 54-28
2. 論文標題 Remarks on the hidden symmetry of the asymmetric quantum Rabi model	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 285202-285216
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1751-8121/ac0508	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 若山正人	4. 巻 No.25
2. 論文標題 光とゼータ関数の特殊値 (Photons and special values of zeta functions)	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 日本数学会 数学通信	6. 最初と最後の頁 24-25
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Cid Reyes-Bustos, Masato Wakayama	4. 巻 5
2. 論文標題 Heat kernel for the quantum Rabi model	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Advances in Theoretical and Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1347-1447
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/ATMP.2022.v26.n5.a8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Cid Reyes-Bustos, Masato Wakayama	4. 巻 16
2. 論文標題 Degeneracy and hidden symmetry - an asymmetric quantum Rabi model with an integer bias	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Communications in Number Theory and Physics	6. 最初と最後の頁 615&#8211;672
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/CNTP.2022.v16.n3.a4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masato Wakayama	4. 巻 20
2. 論文標題 Number Theory and Quantum Physics Based on Symmetry-Themes from Quantum Optics	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 NTT Technical Review	6. 最初と最後の頁 67-76
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 5件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 Masato Wakayama
2. 発表標題 Interaction Models in Quantum Optics, Representation Theory and Number Theory
3. 学会等名 理化学研究所 iTHEMS コロキウム (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masato Wakayama
2. 発表標題 Quantum Interaction and Number Theory, Representation Theory - modular forms a bit beyond, infinite symmetric group, Fuchsian ODE
3. 学会等名 French-Japan Web-Seminar on Painleve equations and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masato Wakayama
2. 発表標題 Geometric and algebraic problems on quantum interaction model
3. 学会等名 RIMS Kyoto University (Workshop on "Fields theory and related Topics") (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masato Wakayama
2. 発表標題 Covering of asymmetric quantum Rabi models and possible zeta problems
3. 学会等名 Symposium "Rabi and Spin Boson models" Kyushu University, Fukuoka (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masato Wakayama
2. 発表標題 Heat Kernels of Quantum Interaction Models for Quantum Computers
3. 学会等名 SIAM Computational Science and Engineering 2023, Part of MS302 Mathematics for Industry in the Asia Pacific Area - Part I of II (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

若山正人ウェブサイト (東京理科大学) <a href="https://www.tus.ac.jp/ridai/doc/ji/RIJIA01Detail.php?act=nam&amp;kin=ken&amp;diu=72bb">https://www.tus.ac.jp/ridai/doc/ji/RIJIA01Detail.php?act=nam&amp;kin=ken&amp;diu=72bb</a> 若山正人ウェブサイト (九州大学) <a href="https://imi.kyushu-u.ac.jp/~wakayama/eindex.html">https://imi.kyushu-u.ac.jp/~wakayama/eindex.html</a>
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
ドイツ	University of Augsburg		