

令和 5 年 6 月 22 日現在

機関番号：24601

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2022

課題番号：20K03562

研究課題名（和文）トーリック多様体と凸多面体の双方向にわたる応用研究

研究課題名（英文）Interactions between toric varieties and convex polytopes

研究代表者

川口 良（Ryo, Kawaguchi）

奈良県立医科大学・医学部・講師

研究者番号：10573694

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,400,000円

研究成果の概要（和文）：トーリック多様体と凸多面体の密接な関係を利用して、代数幾何学と代数的組み合わせ論の諸問題について研究を行った。断面種数と体積の関係に関する論文が雑誌に掲載され、凸多面体論の研究者との交流が始まり、共同研究の体制を築くことができた。さらに、断面種数の下限に関しても新しい結果が得られた。また、トーリックの場合における素数次Weierstrass半群の巡回性の数値的判定法を、10次以下の偶数にまで拡張した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

図形（代数多様体）を方程式の解集合として捉える代数幾何学において、トーリック多様体は凸多面体論と深いつながりを持った特殊な多様体群であり、重要な不変量の多くを対応する多面体の形や体積、格子点の数といった情報から読み取ることができる。両分野の概念の間にできるだけ多くの接点を見つけることが研究の発展に欠かせない要素であるが、本研究では代数幾何学における偏極多様体の断面種数やWeierstrass半群といった概念を凸多面体の言葉で解釈する方法を見つけた。

研究成果の概要（英文）：In this study, we worked on various problems in algebraic geometry and algebraic combinatorics by using the close relationship between toric varieties and convex polytopes. We published a paper on the relation between the sectional genus and the volume of a polytope, which led to exchanges and initiated joint research with polyhedral researchers. While we also obtain the numerical criterion for determining the cyclicity of Weierstrass semigroups whose degree is even number less than or equal to 10.

研究分野：代数幾何学

キーワード：代数幾何学 偏極多様体 断面幾何種数 トーリック多様体 凸多面体 Weierstrass半群

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

トーリック多様体の理論は、1970年代に Demazure, 三宅, Mumford, 小田らによって創始された。原点を始点とする半直線によるユークリッド空間の分割 (= 扇) から代数多様体を構成し、その上の因子を多面体として表現することで代数多様体に関する様々な情報をこの多面体から読み取ることができる。例えばトーリック曲面に埋め込まれた代数曲線に対し、その種数が対応する多角形の内点の数に一致するのは、その典型的な例である。こうした手法は代数多様体の不変量の計算において革新的な技術であり、代数幾何学の研究において何かの例を構成したり予想を証明したりするといった問題が、トーリック多様体の範疇においては容易に実行できる場合が多い。そのためには「代数幾何学と凸多面体論の概念の間にいかに多くのつながりを見つけたか」という点が重要であって、それこそがトーリック幾何学の理論の核心と言える。筆者もこの哲学に基づいて、これまでに代数曲線のゴナリティーやワイエルシュトラス半群を、対応する多角形の形から求める方法を見つけてきた。しかし、従来の研究はこれらの例のように、 n 次元トーリック多様体の因子 (つまり $n-1$ 次元の部分多様体) を扱うものがほとんどで、本研究のように偏極多様体としての不変量にまで注目して多面体との関連を調べた研究はほとんどなかった。代数多様体と因子を組として扱う偏極多様体を考えた場合は、多様体を因子で切断していくことにより $n-1$ 次元、 $n-2$ 次元、 \dots 、 1 次元とより低次元の多様体までを研究の対象に含める。したがって、偏極トーリック多様体を考えることは、これまでに知られていない代数幾何学と凸多面体論の接点の発見につながる可能性がある。本研究はこのような動機に基づいて企図されたものである。

2. 研究の目的

背景の項で述べたように、本研究は偏極トーリック多様体の研究を通して代数幾何学と凸多面体論の間に接点を見出し、両分野の共同作業の進展を促すことを目的としている。具体的には、

- ・偏極トーリック多様体の不変量に関する研究
- ・巡回型の Weierstrass 半群に関する研究

を予定していた。前者については、以前の研究で証明した「偏極トーリック多様体の断面種数の上限と凸多面体の体積下限の同値性」に関する論文を完成させることを第一の目標とする。現在までに体積が下限に等しい凸多面体の例はいくつか構成したが、より一般的な分類も目指す。一方、これまでトーリック多様体と凸多面体の関係が利用されるのは、前者に関する問題を解くのに後者を使う場合がほとんどだった。しかし、偏極トーリック多様体に関する結果を眺めると、それらが凸多面体の h ベクトルの性質を調べるのに応用できる可能性が強く感じられる。したがって、代数幾何から多面体論への結果の還元についても取り組む。

素数次の Weierstrass 半群については、巡回型の場合に MP 条件と呼ばれる数値的条件を満たすことが知られている。次数が7以下の素数の場合はこの逆も正しいが、11次以上では正しくないことが知られていて、半群の巡回性と MP 条件の間にはどの程度の差異があるのかは分かっていない。筆者は神奈川工科大の米田氏との以前の共同研究において、トーリック曲面上の曲線に対しては巡回性と MP 条件が同値になることを示した。次の段階として、次数が合成数である Weierstrass 半群について、その巡回性を MP 条件のような数値的条件で表現することを目標とする。

3. 研究の方法

偏極トーリック多様体の研究について、凸多面体の体積は h ベクトルの総和であることを考えれば、上述した断面種数の上限と凸多面体の体積下限の同値性は「断面種数の上限から h ベクトルに関する性質が得られる」と解釈することもできる。一方、偏極多様体に対し福間は断面種数を拡張して第 i 断面種数を定義し、これについても断面種数と類似の上限が存在することを証明した。したがって、これらの不等式を凸多面体の言葉に翻訳することで、新しい発見につながる。

Weierstrass 半群の研究について、素数次 Weierstrass 半群に対し巡回性と MP 条件の同値性を示すときに鍵となったのは、トーリック多様体の理論から凸多角形を使って MP 条件を視覚化する点である。具体的には、素数次のトーリック型半群 $H(P)$ が MP 条件を満たすことは P の乗っている曲線に対応する多角形が台形であることと同値になり、これを用いて $H(P)$ の巡回性を証明したわけだが、その中で $H(P)$ の次数が素数であることは本質的な条件ではない。したがって、「トーリック型の Weierstrass 半群が巡回型であることと曲線に対応する多角形が台形であることは (素数次でなくとも) 同値か」という問題が提起され、これを解くことで一般の次数について巡回性と同値な数値的条件を見つえられる可能性がある。この研究は、研究協力者の米田

氏と定期的に会って議論を行いながら進めていく。

4. 研究成果

断面種数の上限と体積下限の同値性に関する論文は J. Algebraic Combin. (53) に掲載された。この結果を受けて、東京大学の土谷氏（現在は東邦大学）が例外的に除かれていた場合（内部格子点を持たない多面体）に対しても体積下限の不等式を拡張して、類似の結果を得た。さらに、下限体積の発見者である大阪大学の日比氏はその分類を多面体論における次なる重要課題と位置付けて、海外の研究者も加えたグループを形成してこの問題への取り組みを押し進めることを決め、筆者もそこに加わることになった。このように、本研究は代数幾何学の範囲を超えて、組み合わせ論を巻き込んだ新たな潮流を生み出し始めている。

また、凸多面体の理論が断面種数の上限と結びついていたことを考えれば、同様に下限に関しても応用が期待できると考えて研究を進め、凸多面体の h ベクトルの性質を利用することで偏極トーリック多様体の第 i 断面種数について新しい下限を発見した。この結果は 2022 年度の日本数学会で報告した。

また、Weierstrass 半群の巡回性に関しては米田氏との共同研究を進め、10 次以下の偶数次の場合について、トーリック型の Weierstrass 半群が巡回型になるための必要十分条件（MP 条件の類似）を与えた。そして、その結果をまとめた論文が J. Pure Appl. Algebra (225) に掲載された。今後はより大きな偶数、さらには一般の合成数にまで範囲を広げて研究を進めていく。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Ryo Kawaguchi and Jiryo Komeda	4. 巻 225
2. 論文標題 Weierstrass n-semigroups with even n and curves on toric surfaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jpaa.2021.106759	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ryo Kawaguchi	4. 巻 53
2. 論文標題 Sectional genus and the volume of a lattice polytope	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebraic Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1253-1264
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10801-020-00961-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 川口良
2. 発表標題 偏極トーリック多様体の第i断面幾何種数の下限
3. 学会等名 日本数学会2022年度秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------