様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　７ 年　 ６ 月　 ２ 日現在

機関番号：１３９０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2020～2024
課題番号：２０Ｋ０３５８０

研究課題名（和文）微分同相群の不変量が関与する指数定理

研究課題名（英文）Index theorem relevant to the invariants of diffeomorphism groups

研究代表者
森吉　仁志（Moriyoshi, Hitodshi）

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：００２３９７０８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：「非可換幾何学の枠組による指数定理の拡張」と「微分同相群の不変量が関与する指数定理の展開」という方針の下に，多様体とは限らない離散的集合上での指数定理の展開や，カントール集合などのフラクタル集合をコロナ空間に持つような完備リーマン多様体上への指数定理の拡張を行った．加えて，葉層二次特性類の一つである Bott-Virasoro 類と等積中心アファイン平面曲線全体のなす空間との関係を精査し，漸近的等質中心アファイン平面曲線に関連して現れるソリトン数と半整数回転数を結びつける指数定理を確立した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
離散化された対象とは，現実の社会では最初に現れる研究客体である．そのような対象では具体的計算やPCを用いたシミュレーションなどによる細かい研究が可能であり，従って研究の応用範囲も広い．本研究では，現代数学の精華の一つと認められる指数定理を離散化することを目標とした．そして研究成果の一つとして，物理学の格子ゲージ理論で研究されている Ginsparg-Wilson 作用素に対する指数定理の定式化や，フラクタル集合をコロナ空間とする完備リーマン多様体への指数定理の拡張に成功した．

研究成果の概要（英文）：Under the principles of "extending the index theorem within the framework of non-commutative geometry" and "developing the index theorem involving invariants of diffeomorphism groups", we have extended the index theorem on discrete sets that are not necessarily manifolds, and on complete Riemannian manifolds whose corona spaces include fractal sets such as the Cantor set. In addition, we have investigated the relationship between the Bott-Virasoro class, which is one of the secondary characteristic classes for foliations, and the space of all equicentroaffine plane curves, and established an index theorem that links soliton numbers with half-integer rotation numbers, whihch appear in relation to the space of asymptotic equicentroaffine plane curves

研究分野：位相幾何，非可換幾何

キーワード：指数定理　非可換幾何　葉層多様体　微分同相群　K理論　巡回コホモロジー　等質中心アファイン曲線　Alexander-Spanierコホモロジー

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

１．研究開始当初の背景

多様体の幾何不変量（オイラー数・符号数・L 種数・A-hat 種数など）に関する深遠な定理のひとつに Atiyah-Singer 指数定理 [Atiyah-Singer, Ann. of Math. 87(1968)] がある（以下単に指数定理とよぶ）．簡明に述べると，指数定理とは多様体の解析不変量（作用素のフレドホルム指数）と幾何不変量（特性類の積分）を結びつける公式であり，性質が全く異なる２つの不変量を関連付けているという点で著しく高い有用性をもつ．例えば閉多様体の交差形式の符号数 (signature) と L 種数が一致すること，スピン閉多様体の場合に Dirac 作用素のフレドホルム指数と A-hat 種数が一致して整数となること，さらに正スカラー曲率を持つスピン閉多様体の A-hat 種数が必ず０になるという事実などは，指数定理の帰結として得られる著しい結果である．

一方 A. Connes は，指数定理の一般的な定式化を一つの動機として，1980 年代後半に非可換幾何学という新しい枠組を提起した[Publ. Math. IHES, 62 (1986)]．そして非可換幾何学は，微分幾何学・位相幾何学・作用素環論・エルゴード理論・大域解析学にまたがる広汎な分野に多大な刺激を与え続けている [Connes, Noncommutative Geometry, Academic Press, 1994]．指数定理は本来その適用対象を閉多様体に限るが，Connes は作用素環論・K理論・巡回コホモロジー群などの手法を援用して，葉層多様体・エルゴード的群作用を許す多様体・非コンパクト等質空間，有限幾何性をもつ非コンパクト完備リーマン多様体などに対しても指数定理を拡張した．このような一般化は，従来の手法では達成し得なかった成果である．その手法をさらに発展させて，Baum, Higson, Moscovici, Roe 等は，位相幾何学における長年の懸案である Novkov 予想や Gromov-Lawson 予想に関する著しい進展を与えた．こうした指数定理の拡張はどこまで可能なのか，そのとき指数定理の本質は何であるのかという問いが，本研究課題の出発点である．一方で，この問いに対する形式的な答えは既に用意されている．非可換幾何の枠組によれば，従来の指数定理は K 理論と巡回コホモロジー群のペアリングとして解釈される．一般に C*環 A が与えられたとき，K 群と巡回コホモロジー群という２つのアーベル群 $K_*(A)$ と $HC^*(A)$ を定義できる．そしてこれらのアーベル群の間に，複素数 C に値をとる自然なペアリング：$K_*(A) \times HC^*(A) \to C$ が存する（正確に言うと巡回コホモロジー群に関しては，適切な稠密部分環と取り換える必要がある）．ここで A としてコンパクト作用素全体の成す環 k を選ぶと，実は k に対するペアリングを用いて Atiyah-Singer 指数定理を回復できる．このことから，環を様々に取り換えてペアリングを実現することで，形式的には指数定理の一般化が可能となる．しかし，与えられた幾何的状況下で指数定理を拡張するためにはどのような環を選ぶべきか，またペアリングの値を導く公式がどのように記述されるのかという問題は残る．

(2)本研究の目的および学術的独自性と創造性

非可換幾何学の枠組とは，粗く言えば一般に非可換である作用素を考えて幾何を解釈し直すことであるが，非可換性を考慮するという着想は Connes 独自のものではなく，遡れば 1960 年代の変形量子化の研究などにも端緒を見出すことができる．しかし，現在でも非可換幾何学の研究の多くは作用素環論に軸足をおき，幾何学の立場からの具体的研究は数少ない．豊富な成果が蓄積している多様体論に即した幾何的視点による研究は，深くは究められていないのが現状である．それゆえ，とくに葉層多様体や微分同相群が関与する場合を取上げて指数定理の有用性を精査することは，幾何学にとって重要かつ意義ある研究と考えられる．

２．研究の目的

本研究では「非可換幾何学の枠組による指数定理の拡張」と「微分同相群の不変量が関与する指数定理の展開」を主要目標に掲げ，以下のような状況において指数定理を導出する：

①葉層多様体あるいは微分同相群の離散部分群作用があるとき，葉層 C*環などの環が自然に定まる．このとき K 群と巡回コホモロジー群のペアリング：$K_*(A) \times HC^*(A) \to C$ を用いて，葉層特性類や微分同相群の不変量が関与する指数定理を記述する；

②上記ペアリングを相対 K 群と相対巡回コホモロジー群へ拡張して新たな指数定理を導く．とくにエンドを有する多様体に対して，葉層特性類や微分同相群の不変量が関与する指数定理を確立する；

③葉層円周束に対する族指数の二次特性類と Godbillon-Vey 類との関係を明確にし，次いで一般の葉層束における族指数の二次特性類と葉層特性類や微分同相群の不変量との関連を解明する．

３．研究の方法

本研究組織は，本研究代表者と国内研究協力者 3 名；夏目利一（名古屋工業大学），黒瀬俊（関西学院大学理学部 ），藤岡敦（関西大学システム理工学部）および海外研究協力者 2 名; P. Piazza (Universita di Roma, la Sapienza)， S. Hurder (University of Illinois at Chicago）の計 6 名によって構成された．そして本研究の２つの主要目的「非可換幾何学の枠組による指数定理の拡張」と「微分同相群の不変量が関与する指数定理の展開」に応じて，導出部門（指数定理の定式化）；森吉，夏目，Piazza；展開部門（指数定理の適用）；森吉，黒瀬， 藤岡，Hurder；を設けて，以下のような段階を経て研究を推進した．

①予備段階として本研究課題の周辺分野における基礎知識の充足を図る．そのため本研究目的に関連する研究集会へ積極的に参加し，また個別に専門家との密接な研究連絡を行った．

②研究の本段階，すなわち「非可換幾何学の枠組による指数定理の拡張」と「微分同相群の不変量が関与する指数定理の展開」においては，多くの専門家を交えた包括的研究連絡を行った．このような機会を経て研究成果の最終的完成をはかり、同時に応用面での妥当性を検証した ．

４．研究成果

本研究課題の 2 つの目的「非可換幾何学の枠組による指数定理の拡張」と「微分同相群の不変量が関与する指数定理の展開」に対して，導出部担当グループと展開部担当部ループが定期的に研究討論を行って次の成果を得た：

1）Ginsparg-Wilson 指数と量子ウォークが関与する指数定理（夏目利一との共同研究）

2）F. Noether 指数公式と量子ウォークに対する指数定理との関連性の解明（夏目利一との共同研究）；

3）多面体に対する Gauss-Bonnet 定理と Alexander-Spanier コホモロジーに関する研究；

4）カントール集合をコロナ空間とした指数定理（夏目利一との共同研究）

5）等質中心アファイン平面曲線のなす空間の研究（黒瀬俊および藤岡敦との共同研究）；

6）漸近的等質中心アファイン平面曲線とソリトン数との関連性に関する研究（黒瀬俊および藤岡敦との共同研究）.

1）では，ランダムウォークの一般化と考えられる量子ウォークを用いて，Ginsparg-Wilson 指数が関与する具体例を見出した．各有理整数に 2 次行列環を対応させるという状況下で定まる量子ウォークにおいて，離散的なフレドホルム作用素が定義される．この設定下で C*環を構成して，この作用素に対する Ginsparg-Wilson 指数を考えることができる．このとき，フレドホルム指数が Ginsparg-Wilson 指数と一致することを確認した.

2）では，Ginsparg-Wilson 指数が関与する具体例を量子ウォークを用いて構成し，さらに F. Noether が証明した指数定理との関連性を見出した．また F. Noether が導入した作用素の成す C*環を考えると，これは単位円周上の連続関数環の直和に対してのコンパクト作用素全体による C*環の拡大を定める．この拡大が導く K 群の 6 項完全系列によって，上記の指数が記述されることを確かめた．

3）では Alexander-Spanier コホモロジーを用いて，閉多様体の写像度集合の性質への応用例を見出した．

4）では，2 分岐を繰返す無限樹木（binary tree）上の指数定理を研究した．この場合には樹木のコロナ空間がカントール集合となり，J.Roe による coarse index theorem を用いて，カントール集合上への指数定理の展開できる．このとき binary tree から定義される Roe 代数の K 群に指数をもつ作用素を構成して指数公式を確立した．この構成をさらに一般化して，コロナ空間がカントール集合とは限らない完備リーマン多様体上の指数定理への拡張も可能となる．指数定理の観点からは多様体の位相が重要であることは言うまでもないが，多様体の無限遠境界として自然に出現するコロナ空間の挙動をも統制する指数定理を導入することには大きな意義が認められる．

5）では，等質中心アファイン曲線のなす空間に対する黒瀬-藤岡の研究を発展させて，等質中心とは限らない種々のアファイン曲線のなす空間を導入し，これらの空間上にシンプレクティック作用を構成した．これらの作用に関しても，単位円周の微分同相群から得られる Bott-Virasoro 群との関連性について，一定の成果を得た．

6）では，等質中心アファイン曲線のなす空間に対する考察をさらに深め，漸近的等質中心アファイン曲線という概念を導入し，ソリトン解との関連性を精査した．漸近的等質中心アファイン曲線を考えると，その回転数が半整数として定まる．一方，散乱理論における Levinson 定理を考えると，シュレディンガー作用素に関する束縛状態の個数が，ある正則関数の対数積分で与えられる．この対数積分と上記回転数を結びつける指数定理を確立し，その指数公式を得た．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計8件（うち招待講演　6件／うち国際学会　4件）

１．発表者名 森吉仁志
２．発表標題 コース幾何学と指数定理--カントール集合をコロナ空間として--
３．学会等名 千里山幾何学研究会，関西大学（招待講演）
４．発表年 2023年

１．発表者名 H. Moriyoshi
２．発表標題 Geometry on the circle diffeomorphism group and the space of equicentroaffine curves
３．学会等名 BΓ School; Homotopy theory of Foliations, Chuo University（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

１．発表者名 H. Moriyoshi
２．発表標題 Geometry on the circle diffeomorphism group and the space of equicentroaffine curves
３．学会等名 8th China-Japan Geometry Conference, Guilin, China（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

１．発表者名 H. Moriyoshi
２．発表標題 On localization of the Godbillon-Vey class to compact leaves
３．学会等名 Foliated Spaces, Tilings and Group Actions 2024, Madrid（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2024年

１．発表者名
森吉仁志

２．発表標題
Steenrodホモロジー群とコロナ指数定理

３．学会等名
葉層構造の幾何学とその応用，京都教育大学（招待講演）

４．発表年
2023年

１．発表者名
森吉仁志

２．発表標題
Tsuboi-Godbillon-Vey 拡大と Heisenberg 群

３．学会等名
第46回伊豆トポロジーセミナー

４．発表年
2023年

１．発表者名
H. Moriyoshi

２．発表標題
The Ginsparg-Wilson index theorem for Quantum walk on the integer lattice

３．学会等名
USTech-Nagoya workshop on Quantum Science（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2021年

１．発表者名
森吉仁志

２．発表標題
整数格子上の量子ウォークと Noether 指数定理

３．学会等名
日本数学会2022年度年会

４．発表年
2021年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

―

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	夏目　利一 (Natsume Toshikazu)	名古屋工業大学	
研究協力者	黒瀬　俊 (Kurose Takashi)	関西学院大学	
研究協力者	藤岡　敦 (Fujioka Atsushi)	関西大学	

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計4件

国際研究集会 The 6th China-Japan Geometry Conference, Chongqing, China	開催年 2021年～2021年
国際研究集会 The 7th Japan-China Geometry Conference, Hiroshima, Japan	開催年 2022年～2022年
国際研究集会 The 8th China-Japan Geometry Conference, Guilin, China	開催年 2023年～2023年
国際研究集会 The 9th Japan-China Geometry Conference, Takamatsu, Japan	開催年 2024年～2024年

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関