

令和 6 年 5 月 15 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03588

研究課題名（和文）多面体を用いた3・4次元多様体の微分構造と幾何構造の研究

研究課題名（英文）Research on differential and geometric structures of 3- and 4-manifolds with polyhedra

研究代表者

古宇田 悠哉（KODA, Yuya）

慶應義塾大学・経済学部（日吉）・教授

研究者番号：20525167

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：3次元・4次元の可微分多様体を記述するスパインおよびシャドウとよばれる2次元多面体を用いて、下記の研究を遂行した。まず、接触構造のReebフローと正フロースパインの対応に着目し、正フロースパインに対する接触構造の存在証明、およびこの対応により与えられる正フロースパインの集合から接触構造の集合への写像の全射性の証明を行った。また、シャドウと特異点論の関係に基づき、シャドウの補空間の基本群の明示公式やディバイド絡み目の双曲体積の評価を与えた。関連する低次元トポロジーの話題として、Heegaard分解のGoeritz群、大域的位相欠陥のホモトピー分類に関する研究を進め、成果を発表した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

3次元および4次元多様体論においては、可微分構造を介して定義される諸概念が、組合せ的対応物により解釈され、それにより新たな視覚的・構成的手法が開発されることで、研究が大いに進展してきた。本研究では、ここにおける「組合せ的対応物」としてスパインとシャドウという2次元多面体に着目して研究を行い、特に、「接触構造」と「正フロースパイン」の対応、「特異点」と「シャドウ」の対応の存在を明示的に記述した。前者の対応により、接触構造のReebフローの力学系をフロースパイン上の離散力学系として捉えることが原理的に可能になり、後者の対応によりディバイド絡み目の双曲体積の評価が可能になった。

研究成果の概要（英文）：We carried out the following research using 2-dimensional polyhedra called spines and shadows, which combinatorially describe differentiable 3- and 4-manifolds. Focusing on the correspondence between the Reeb flows of contact structures and positive flow spines, we proved the existence of contact structures for positive flow spines. Further, we showed the surjectivity of the map from the set of positive flow spines to the set of contact structures given by this correspondence. We also gave explicit representations of the fundamental groups of the complements of shadows. On a related topics, we have studied the Goeritz groups of Heegaard splittings, and the homotopy classification of global defects.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：3次元多様体 接触構造 多面体 スパイン フロー

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

任意の $3 \cdot 4$ 次元可微分多様体はスパインやシャドウとよばれる 2 次元多面体により組み合わさる表示することができる。可微分多様体とこれら多面体の対応は先行研究により明らかにされていたが、多様体に接触構造などの付加構造が備えられた場合、多面体に対してどのような付加構造を与えることでより精密な対応付けが可能になるのかについては、研究が十分になされておらず、そもそもこのような対応付けの可能性を含め、不明な点が多く残されていた。

2. 研究の目的

本研究では、向き付け可能な閉 3 次元多様体上の非特異フロー (のホモトピー本研究では、向き付け可能な閉 3 次元多様体上の非特異フロー (のホモトピー類) と、その多様体のフロースパイン (のある種の同値類) との間の対応に着目し、接触構造の Reeb フローを用いることで、接触構造 (のイソトピー類) と正フロースパインの関係の構築、およびそれに基づく接触構造の諸性質の組み合わせの記述を目指した。また、 4 次元多様体上に備わる特異点由来の構造をシャドウにより記述し、ディバイド絡み目の双曲構造やシャドウの代数的情報を引き出すことを目標に研究を遂行した。

3. 研究の方法

正フロースパインに対応する接触構造の存在性は直接的な構成的証明により証明した。接触構造に対応する正フロースパインの存在証明は、Giroux による所謂 Giroux 対応 (接触構造とオープンブック分解の対応) を拠り所にし、オープンブック分解からフロースパインを構成することにより実施した。ディバイド絡み目の双曲構造の記述は、安定写像の特異点と双曲構造の関係を考察した先行研究で得られた知見を生かし、シャドウの一般化にあたる多面体に対しても双曲多面体分割をうまく対応させることで得られた。補空間の基本群は、シャドウの特異点集合を図式に落とし、結び目の Wirtinger 表示に着想を得た手法により導出した。

4. 研究成果

スパインに関連する研究については、 3 次元多様体の接触構造とフロースパインの対応に関して、下記の成果を得た。まず、石井一平氏、石川昌治氏、直江央寛氏と共同で、正フロースパインに対して接触構造が一意的に存在することを証明し、査読付き国際誌から論文を発表した。また、同 3 氏と共同で、上記一意存在性により得られる正フロースパインの集合から接触構造の集合への写像の全射性、すなわち、各接触構造に対し、対応する正フロースパインすることを証明し、査読付き国際誌から論文を発表した。

シャドウに関連する研究については、下記の成果を得た。まず、石川昌治氏、直江央寛氏と共同で、シャドウの補空間の基本群の明示的な表示方法を与えた。これにより、Milnor ファイバー・平面上の直線配置の複素化の補空間の基本群を統一的に計算することが可能になった。得られた結果は査読付きの洋書の中で論文として発表した。また、Bruno Martelli 氏、直江央寛氏と共同で、シャドウ複雑度が 1 である閉 4 次元多様体論を分類し、得られた成果を査読付き国際誌から発表した。古谷凌雅氏との共同研究では、双曲絡み目の双曲構造と安定写像の特異点との関係を明らかにした論文を査読付き国際誌から発表した。ここでは、安定写像の Stein を変形してシャドウと見做すことが鍵になった。さらに、同氏と共同で、ディバイド絡み目の双曲構造を、シャドウに着想を得た新たな多面体を用いて記述し、得られた成果を査読付き国際誌から発表した。

この他、関連する話題として、下記の成果を得た。まず、井口大幹氏と共同で、橋分解の Goeritz 群の有限性を与える十分条件を Hempel 距離を用いて記述する論文を査読付き国際誌から発表した。また、井口大幹氏、廣瀬進氏、金英子氏と共同で、絡み目の橋分解の Goeritz 群を定義し、幾何群論・力学系的諸性質を記述する論文を査読付き国際誌から発表した。Sangbum Cho 氏、Arim Seo 氏と共同研究では、 $(1,1)$ -結び目に対し、ブレイド構造を用いて代数的に定義される「 $(1,1)$ -length」という不変量と、幾何的に定義される「level number」という不変量が一致することを証明する論文を査読付き国際誌から発表した。また、作間誠氏と共同で、 3 次元多様体内の曲面のホモトピーモーション群を定義し、この群の構造と多様体の幾何構造との関係を明らかにした論文を査読付き国際誌から発表した。以上が 3 次元多様体と写像類群に関して得られた

成果のうち、既に出版されたものである。投稿中の成果としては次のものがある。まず、高尾和人氏と共同で、Heegaard 分解の強既約性、および Goeritz 群の有限性を保証する十分条件をそれぞれ Heegaard 図式を用いて記述することに成功した。また、Sangbum Cho 氏、Jung Hoon Lee 氏と共同で、3 次元球面の種数 3 の Heegaard 分解の Goeritz 群に関する Powell 予想を証明した。この成果は、2018 年に Freedman-Scharlemann により arXiv に公開された（現在も未出版である）論文の別証明である。田中勇輝氏との共同研究では、結び目の $(1,1)$ -分解の Goeritz 群の構造を全て明らかにした。さらに、小沢誠氏、Yi-Sheng Wang 氏と共同で、3 次元球面内の種数 2 のハンドル体結び目の帆空間の本質的アニュラスの配置とそれによる JSJ 分解の構造を明らかにした。

この他、トポロジーの物質科学への応用に関して、次の成果が得られた。まず、阪田直樹氏他 4 名との共同研究では、3 次元多様体のハンドル体分解とその物質科学への応用に関して得られた成果を査読付き国際誌から発表した。また、野崎雄太氏他 2 名との共同で、秩序を持った系の大域的位相欠陥のホモトピー分類に関する研究を実施し、得られた成果を投稿中である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Masaharu Ishikawa, Yuya Koda, Hironobu Naoe	4. 巻 34
2. 論文標題 Presentation of the fundamental groups of complements of shadows	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Essays in Geometry: Dedicated to Norbert A' Campo (ed. A. papadopoulos), IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics	6. 最初と最後の頁 557 ~ 588
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Furutani Ryoga, Koda Yuya	4. 巻 -
2. 論文標題 Divides and hyperbolic volumes	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Annali della Scuola normale superiore di Pisa - Classe di Scienze	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2422/2036-2145.202309_005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ishii Ippei, Ishikawa Masaharu, Koda Yuya, Naoe Hironobu	4. 巻 -
2. 論文標題 Positive flow-spines and contact 3-manifolds, II	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923 -)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10231-023-01400-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ishii Ippei, Ishikawa Masaharu, Koda Yuya, Naoe Hironobu	4. 巻 202
2. 論文標題 Positive flow-spines and contact 3-manifolds	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923 -)	6. 最初と最後の頁 2091 ~ 2126
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10231-023-01314-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sakata N., Mishina R., Ogawa M., Ishihara K., Koda Y., Ozawa M., Shimokawa K.	4. 巻 478
2. 論文標題 Handlebody decompositions of three-manifolds and polycontinuous patterns	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences	6. 最初と最後の頁 1~28
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1098/rspa.2022.0073	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hirose Susumu, Iguchi Daiki, Kin Eiko, Koda Yuya	4. 巻 2022
2. 論文標題 Goeritz Groups of Bridge Decompositions	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 9308~9356
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnab001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Koda Yuya, Martelli Bruno, Naoe Hironobu	4. 巻 31
2. 論文標題 Four-manifolds with shadow-complexity one	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Annales de la Faculte des sciences de Toulouse : Mathematiques	6. 最初と最後の頁 1111~1212
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/afst.1715	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Cho Sangbum, Koda Yuya, Seo Arim	4. 巻 14
2. 論文標題 Braid group and leveling of a knot	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Topology and Analysis	6. 最初と最後の頁 945~968
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/s1793525321500114	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Daiki Iguchi, Yuya Koda	4. 巻 315
2. 論文標題 Distance and the Goeritz groups of bridge decompositions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Pacific Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 347 ~ 368
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/pjm.2021.315.347	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuya Koda, Hironobu Naoe	4. 巻 20
2. 論文標題 Shadows of acyclic 4-manifolds with sphere boundary	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Algebraic & Geometric Topology	6. 最初と最後の頁 3707 ~ 3731
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/agt.2020.20.3707	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuya Koda, Makoto Sakuma	4. 巻 2163
2. 論文標題 "Monodromy groups" of Heegaard surfaces of 3-manifolds - Research announcement -	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 47 ~ 61
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計15件 (うち招待講演 15件 / うち国際学会 8件)

1. 発表者名 Yuya Koda
2. 発表標題 The Powell Conjecture for the genus-three Heegaard splitting of the 3-sphere
3. 学会等名 Mini-Workshop on Knots and Manifolds (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Yuya Koda
2. 発表標題 Homotopy classification of knotted defects in ordered media
3. 学会等名 SKCM2 Spring Symposium (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Yuya Koda
2. 発表標題 Colored spatial graph diagrams and homotopy classification of line defects
3. 学会等名 SKCM2 winter school (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yuya Koda
2. 発表標題 Homotopy classification of biaxial nematic liquid crystal textures
3. 学会等名 東京女子大学トポロジーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yuya Koda
2. 発表標題 Shadows, divides and hyperbolic volumes
3. 学会等名 トポロジー火曜セミナー (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yuya Koda
2. 発表標題 Shadows, divides and hyperbolic volumes
3. 学会等名 Topology and Geometry of Low-Dimensional Manifolds 2023 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yuya Koda
2. 発表標題 Singularity theory in the study of mapping class groups of Heegaard splittings, I, II
3. 学会等名 Singularity theory and geometric topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yuya Koda
2. 発表標題 On the mapping class groups of Heegaard splittings under stabilizations
3. 学会等名 Geometry in Low Dimensions 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Makoto Sakuma
2. 発表標題 Homotopy motions of surfaces in 3-manifolds
3. 学会等名 Geometry of discrete groups and hyperbolic spaces, RIMS (Zoom) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 古宇田 悠哉
2. 発表標題 Book rotations in subgroups of mapping class groups associated with Heegaard splittings
3. 学会等名 微分トポロジー セミナー, 京都大学 (Zoom) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yuya Koda
2. 発表標題 Homotopy motions of surfaces in 3-manifolds
3. 学会等名 AS-NCTS Geometry Seminar, 中央研究院 (Webex), 台北 (台湾) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 古宇田 悠哉
2. 発表標題 Heegaard 分解の写像類群
3. 学会等名 2022年日本数学会年会特別講演 (トポロジー分科会), 埼玉大学 (Zoom) (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 古宇田 悠哉
2. 発表標題 "Monodromy groups" of Heegaard surfaces of 3-manifolds
3. 学会等名 埼玉大学 談話会 (Zoom) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 古宇田 悠哉
2. 発表標題 Turaev のシャドウとその複雑度
3. 学会等名 N-KOOKセミナー (Zoom) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 古宇田 悠哉
2. 発表標題 Goeritz groups of bridge decompositions
3. 学会等名 トポロジー火曜セミナー, 東京大学 (Zoom) (招待講演)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

古宇田悠哉のホームページ https://sites.google.com/view/yuyakoda/

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 トポロジーとコンピュータ2022	開催年 2022年～2022年
国際研究集会 トポロジーとコンピュータ2023	開催年 2023年～2023年

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------