様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　５ 月 ３１ 日現在

機関番号：３７１１１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2020～2023
課題番号：２０Ｋ０３５９８

研究課題名（和文）アレクサンドロフ空間の崩壊理論と幾何解析

研究課題名（英文）Collapsing theory of Alexandrov spaces and geometric analysis

研究代表者
三石　史人（MItsuishi, Ayato）

福岡大学・理学部・助教

研究者番号：８０６２５６１６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：(1) 崩壊しないアレクサンドロフ空間のモジュライのリプシッツ・ホモトピー安定性の定量版を証明した(藤岡氏・山口氏と共同研究). (2) 崩壊する3次元アレクサンドロフ空間の位相構造を決定する論文を完成させた(山口氏との共同研究). (3) Guillemin 計量と呼ばれる Delzant 構成に付随する計量に関して Delzant 構成の収束理論を展開した(藤田氏・北別府氏と共同研究). (4) 距離空間上で無限大ラプラシアンの主固有値問題の粘性解の定義を与え解の存在を証明した(柳氏との共同研究). (5) Gromov のピラミッドの基礎研究を行った(江崎氏と数川氏との共同研究).

研究成果の学術的意義や社会的意義
報告者が主に扱った研究対象は曲率の制限を持つ空間(アレクサンドロフ空間)およびある種の無限次元空間(グロモフの意味のピラミッド)である．また距離空間上の解析学について基礎研究も行った．また曲率の制限を持たない状況で多様体の自然な構成に関する連続性を論じた．これらはつまり，様々な立場で距離空間や測度距離空間の収束理論を展開していると言える．特に無限次元の空間の幾何の研究は世界的にまだ始まったばかりであり，今後の発展が大いに期待できる．

研究成果の概要（英文）：We study non-collpasing Alexandrov spaces and their stability in the point of view of quantitative Lipschitz homotopy convergence (with T. Fujioka and T. Yamaguchi). Furthermore, I and Yamaguchi write a paper about collapsing 3-dimensional Alexandrov spaces with boundary. H. Fujita, Y. Kitabeppu and I study a convergence theory of Delzant construction with respect to Guillemin metric. Q. Liu and I give a definition of viscosity solution of the principal eigenvalue problem for infinity Laplacian on metric spaces and show the existence of solution. S. Esaki, D. Kazukawa and I study Gromov's pyramids. In particular, we focus on sevenral fundamental functional inequality and show that their best constant become invariants of pyramids. Using them, we classify certain two infinite dimensional objects as pyramids.

研究分野：アレクサンドロフ空間の収束・グロモフのピラミッド

キーワード：アレクサンドロフ空間　リプシッツ・ホモトピー　崩壊　ピラミッド　測度集中

１．研究開始当初の背景

研究開始当初は次の様な背景があった. 1980 年代に Gromov は, リーマン多様体あるいはもっと一般の空間からなる族に収束概念を定義した. そのうちの一つを Gromov-Hausdorff 収束と呼び, その収束を実現する位相を Gromov-Hausdorff 位相と呼ぶ. これらを以下で, GH 収束・GH 位相と略す. 断面曲率が一様に有界な(かつ諸々の幾何的制限を持つ)リーマン多様体の族を考えると, その族は GH 位相に関してプレコンパクトとなる. 従って, この族から列を取ると, GH 収束する部分列が存在する. この GH 収束極限は一般には多様体にはならず特異空間になる. しかしながら, 曲率が下に有界という性質を距離の言葉で満たす様な距離空間となる. これを一般に Alexandrov 空間と呼ぶ. Alexandrov 空間の様な特異空間を調べる事は, 多様体の位相を調べる事に応用される. 従って, Alexandrov 空間の研究はリーマン幾何において重要である.

また曲率の仮定をおかずとも, 幾何の中では色々な空間同士の対応を観察できる.　その一つは Delzant 構成である. つまり, 与えられた Delzant 多面体から, シンプレクティック・トーリック多様体を構成でき, この対応は適当な意味で一対一である. また今の構成から自然に定義される多様体上の計量を Guillemin 計量と呼ぶ. このときに, この対応の適当な収束概念での連続性を調べる問題は興味深い.

一方で, Gromov は 1990 年代に別種の収束概念を定めた, これを集中と呼ぶ. これは測度の集中現象を原型に持つ確率測度付き距離空間の収束概念であり, その定義から確率論(の一部)との親和性がある. 申請書には, こちらの収束に関する研究をするという予定は書いてなかったが, とあるきっかけで, こちらの研究にも携わる事になった.

２．研究の目的

報告者は, 特異空間である Alexandrov 空間を徹底的に調べる事を目的としていた. 例えば, 一定次元の Alexandrov 空間からなる適当な族は, GH 位相でプレコンパクトである. この族から取り出してきた空間列の GH 収束極限も Alexandrov 空間になるが, 一般に次元はもとのものより大きくならない. 次元に真に乖離がある状況を崩壊と呼ぶ. 族のプレコンパクト性から, 族は崩壊する Alexandrov 空間からなる部分と, 非崩壊の部分に分けられる. 非崩壊の部分は有限個の位相型しか持たない事が Perelman によって証明されているが, それを精密化あるいは一般化する試みを目指した. また崩壊する部分においては, もとの空間の次元が低く設定されている状況で理解を図る. これを崩壊理論と呼ぶ. 我々は 3 次元 Alexandrov 空間の崩壊現象を解明する事を目的の一つとしていた.

報告者は Alexandrov 空間あるいはリーマン幾何で自然に登場する特異空間を「良い」ものだと知らしめたい. その為には「良さ」の基準が必要である. 例えば, それがリーマン多様体さながらの幾何学あるいは解析学を展開できる土壌であるかを知りたい. Gromov の収束理論をより良く進展させる事が大きな目的である. また曲率の制限をおかない状況ではワイルドな収束が登場するが, 伝統的な空間の対応について調べる価値はある.

３．研究の方法

特異空間の上で解析的な不変量を研究する．具体的には p ラプラシアンの固有値を考える．背景の研究としては Alexandrov 空間より広いクラスである RCD 空間上で，それを調べた Ambrosio・本多の仕事がある．彼らは第一正固有値の振る舞いを調べた．ただし，それは当然で，一般の p の場合，p ラプラシアンは非線形で，そもそも固有値に番号が付くかどうか不明であるからである．報告者は，固有値の問題を変更して，固有値とは限らない固有値もどきの列を構成し，研究した．

Alexandrov 空間の非崩壊のモジュライを考察する．このモジュライについて報告者と山口氏は，良い被覆の安定性やリプシッツ・ホモトピーの安定性という結果を得ていた(2019 年出版)．これにより，特に，非崩壊族のリプシッツ･ホモトピー型の有限性が従う．しかしながら，この結論ではリプシッツ定数の評価に関する一様性が保証できない．これを解決するために Perelman-Petrunin の論文のとある関数の構成を用いた．これは藤岡氏のアイデアである．

3 次元 Alexandrov 空間の崩壊理論を展開するのであるが，以前に Alexandrov 空間がコンパクトかつ境界が無い場合は解決していた(2015 年)．次は境界がある場合を考えた．基本的な研究方法は，境界に沿った張り合わせを利用する事である．張り合わされた空間は再び Alexandrov 空間になる事が Perelman によって証明されており，いまの状況で，これは崩壊する．従って，境界が無い場合の理論が適用できる．ここでさらに，張り合わせの対合作用の

影響を詳細に加味する事で，もとの境界付き Alexandrov 空間の構造を調べた．
　また集中位相に関する研究方法は次の様である．確率測度付き距離空間を pm 空間と呼ぶ事にする．Gromov は集中位相を持つ pm 空間全体を適当に自然な意味でコンパクト化した．コンパクト化の要素はもはや pm 空間でないが，それを Gromov はピラミッドと名付けた．コンパクト化の定義から，ピラミッドは pm 空間の有効系の適当な意味の射影極限とみなせるものであり，特に，無限次元空間を有限次元空間の列の近似として扱う状況をピラミッドの意味で把握できる．報告者は江崎氏と数川氏と共同で，ピラミッドについて調べた．研究手法としては，pm 空間の関数解析的な不変量をピラミッドまで拡張する事である．
　再び GH 収束の話題に戻る．曲率の制限がない状況で Delzant 構成の連続性を論じるのであるが，そもそもここで扱うべき収束概念が GH 収束でよいのか，という部分がすでに問題である．報告者は藤田氏・北別府氏と共同で，この様な根底の問題に挑戦した．

４．研究成果

　まず，藤岡氏・山口氏と共同で，Alexandrov 空間の非崩壊のモジュライに対し，リプシッツ定数の一様コントロール付きのリプシッツ・ホモトピーと良い被覆の安定性についての結果を得た．これによって，リプシッツ定数の一様評価付きのリプシッツ・ホモトピー型有限性が従う．この結果はプレプリントにまとめ投稿中である．
　藤田氏・北別府氏と共同で，Delzant 構成の連続性を議論した．収束概念について何が適切かを判断するために，まずは Delzant 多面体より広いユークリッド空間の凸体全体の集合に定義される三つの位相の一致を証明した．また，Delzant 多面体が Delzant 多面体に (GH 収束より強く) Hausdorff 収束しているとき(かつ次元と面の数が一定のとき)，対応する Guillemin 計量付きシンプレクティック・トーリック多様体は，同変 GH 収束する事を示した．また逆対応についても考察を与えた．これらの内容をプレプリントにまとめ投稿中である．
　p ラプラシアンの固有値もどきを定義し，p を無限大に飛ばしたときの極限を調べた．まず，これは極限を持ち，そして極限は Grove-Marvorsen の packing radii という距離空間の不変量の族と関係する事を証明した．またこれの Dirichlet 境界条件付き版も調べた．この結果はプレプリントにまとめ投稿中である．
　研究の目的で述べた様に，特異空間上で解析学を展開したい．柳氏と共同で無限大ラプラシアンの主固有値問題を距離空間上で考察した．背景には，Fukagai-Ito-Narukawa と Juutinen-Lindqvist-Manfredi のユークリッド空間上での仕事がある(共に 1999 年)．無限大ラプラシアンの固有値問題はユークリッド空間上でも粘性解の意味で理解される．我々は距離空間上で無限大ラプラシアンの主固有値問題の粘性解としての定義を与え，解の存在を証明した．これはユークリッド空間の場合の拡張になっている．この結果は 2022 年に出版された．
　Gromov の集中位相とピラミッドの収束理論を，江崎氏・数川氏と共同で研究した．例えば，pm 空間の不変量がピラミッドまでいつ(良く)拡張できるかという一般論を築いた．ある関数解析的な不変量は具体的な不変量として機能する事を証明した．それを用いて，非自明なピラミッドの二系列を完全に区別した．この結果は 2024 年に出版された．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Qing Liu and Ayato Mitsuishi	４．巻 22
２．論文標題 Principal eigenvalue problem for infinity Laplacian in metric spaces	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Advanced Nonlinear Studies	６．最初と最後の頁 548-573
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/ans-2022-0028	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Syota Esaki, Daisuke Kazukawa and Ayato Mitsuishi	４．巻 442
２．論文標題 Invariants for Gromov's pyramids and their applications	５．発行年 2024年
３．雑誌名 Advances in Mathematics	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.aim.2024.109583	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計12件（うち招待講演　12件／うち国際学会　2件）

１．発表者名 三石 史人
２．発表標題 ある無限次元空間の(ピラミッドとしての)区別
３．学会等名 埼玉大学 幾何学セミナー（招待講演）
４．発表年 2022年

１．発表者名 三石 史人
２．発表標題 ある無限次元空間の(ピラミッドとしての)区別
３．学会等名 東京都立大学・幾何学セミナー（招待講演）
４．発表年 2022年

１．発表者名
三石 史人

２．発表標題
距離空間上の無限大（優）調和関数の Liouville 型の定理

３．学会等名
測地線及び関連する諸問題（招待講演）

４．発表年
2023年

１．発表者名
三石 史人

２．発表標題
(測度)距離空間の p ラプラシアンと無限大ラプラシアンの固有値について

３．学会等名
第 9 回室蘭連続講演会および２０２２年度第１回数理科学談話会（招待講演）

４．発表年
2023年

１．発表者名
三石史人

２．発表標題
距離空間上の無限大ラプラシアンの主固有値問題

３．学会等名
東北大学幾何セミナー（招待講演）

４．発表年
2021年

１．発表者名
三石史人

２．発表標題
Eigenvalues of p- and infinty-Laplacian on metric (measure) spaces

３．学会等名
The 6th China-Japan Geometry Conference（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2021年

１．発表者名
三石史人

２．発表標題
p エネルギーのある種のミニ・マックス値とパッキング半径

３．学会等名
東京都立大学幾何学セミナー（招待講演）

４．発表年
2020年

１．発表者名
三石史人

２．発表標題
Certain min-max values related to the p-energy and packing radii

３．学会等名
Partial Differential Equations under Various Metrics（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2020年

１．発表者名
三石史人

２．発表標題
The principal eigenvalue problem for infinity Laplacian in metric spaces

３．学会等名
測地線及び関連する諸問題（招待講演）

４．発表年
2021年

１．発表者名
三石史人

２．発表標題
アレクサンドロフ空間の定量的リプシッツホモトピー安定性

３．学会等名
Geometry and Topoloy（招待講演）

４．発表年
2023年

1．発表者名 三石史人
2．発表標題 測度距離空間の錘 ，特にコーシー分布の集中
3．学会等名 広島大学 トポロジー・幾何セミナー（招待講演）
4．発表年 2023年

1．発表者名 三石史人
2．発表標題 A remark on domain invariance for Alexandrov spaces
3．学会等名 測地線及び関連する諸問題（招待講演）
4．発表年 2024年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関