

令和 5 年 5 月 30 日現在

機関番号：17401

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2022

課題番号：20K03635

研究課題名（和文）重み付きマルコフ過程の確率解析とその応用

研究課題名（英文）Stochastic analysis for weighted Markov processes and their applications

研究代表者

金 大弘（Kim, Daehong）

熊本大学・大学院先端科学研究部（工）・教授

研究者番号：50336202

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,900,000 円

研究成果の概要（和文）：本研究では、一般化ファインマン・カッツ汎関数の重みをもつ対称マルコフ過程に関する確率解析とその周辺問題に対して、新しくより見通しの良い関数解析学的理論の展開を構築することができた。また、その応用として、シュレディンガー作用素に関する最大値原理やその半群のコンパクト性およびスペクトル半径の独立性についても既存の結果をはるかに拡張する新しい結果を得た。特に、古典的な散乱理論で現れる重要な物理量であるシュレディンガー作用素の散乱振幅や散乱長などの概念を飛躍型加法汎関数に対しても考え、その準古典的極限問題に取り組むこともできた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

マルコフ過程における確率論的諸問題をディリクレ形式論やポテンシャル論のような解析学的な観点からみると、確率論的概念における数多くの解析的相対概念が上手く対応している。これは、M. Silverstein 氏や福島正俊氏による一連の先駆的な仕事から初めて指摘され、この分野における近年の研究においても引き継がれている。本研究成果は、このようなトレンドを引き継いだものであり、広い視野でみると確率論と解析学の両方に対する分野横断的研究でもある。確率論と解析学を跨ぐ研究は両分野の理論体系をより豊かにするだけでなく、その周辺問題への応用の範囲も広くしたことに意義がある。

研究成果の概要（英文）：In this research, we considered the stochastic analysis for symmetric Markov processes weighted by so-called generalized Feynman-Kac functionals and their applications containing a continuous additive functional of zero quadratic variation. As applications, we obtained some significant results such as the maximum principles of Schrodinger operators, as well as the compactness and independence of the spectral radius of Schrodinger semigroups. In particular, we extended the concepts of scattering amplitude and scattering length for Schrodinger operators perturbed by a non-local operator, which are important quantities in scattering theory, and studied the problem of their semi-classical asymptotic behavior.

研究分野：数物系科学

キーワード：確率論 確率解析 確率過程論 ディリクレ形式論

1. 研究開始当初の背景

- (1) マルコフ過程における確率論的諸問題をディリクレ形式論やポテンシャル論のような解析学的な観点からみると、確率論的概念における数多くの解析的相対概念が上手く対応している。これは、M. Silverstein 氏や福島正俊氏による一連の先駆的な仕事から初めて指摘され、この分野における近年の研究においても引き継がれている。申請者のこれまでの研究結果は、このようなトレンドを引き継いだものであり、広い視野でみると確率論と解析学の両方に対する分野横断的研究でもある。確率論と解析学を跨ぐ研究は両分野の理論体系をより豊かにするだけでなく、その周辺問題への応用の範囲も広くする利点がある。特に、重み付きマルコフ過程におけるスペクトルの構造の解析とその数学的諸性質に関する重要性については、申請者がこれまでやってきた重み汎関数のスペクトル散乱の長さに対する確率論的解析とその関連する準古典極限問題への応用に関する研究のみならず、近年の数理論物理学における散乱理論の関連研究から指摘されてきた経緯もある。
- (2) 本研究課題と関連する国内外の研究動向としては、竹田雅好氏 (関西大学) や M. Schmidt 氏 (University of Leipzig)、Z.-Q. Chen 氏 (University of Washington) らによるシュレディンガー形式の臨界性理論および最適ハーディ不等式と再帰的ディリクレ形式に関する一連の最新研究などがあり、いずれも本申請研究課題である重み付きマルコフ過程におけるスペクトルの構造と基底状態関数に深く関連している。有界変動な加法汎関数による非局所型ファインマン・カツ汎関数の重みをもつ対称マルコフ過程における類似の問題も、純飛躍型ギルサノフ変換を用いてそのマルコフ過程を変換することにより、局所型重み付きの問題に帰着させることができる。一方では、必ずしも有界変動ではない加法汎関数によるファインマン・カツ汎関数の重みをもつ対称マルコフ過程における類似の問題に対しては、一部の部分的な結果を除けばその発展的な取り組みはなく殆ど詳しく研究されていない上で、その関連する周辺問題への応用研究もその必要性に答えられていなかったことが本研究開始当時の背景にあり、本研究の着想に至る動機づけとなった。

2. 研究の目的

- (1) マルコフ過程の確率論的諸問題およびその応用への研究は、この分野における様々な関数解析学的理論の新展開を提供してきた。本研究では、ファインマン・カツ変換やギルサノフ変換などで誘導される確率論的重みもつ対称マルコフ過程のスペクトル構造とその数学的諸性質を究明することで、シュレディンガー形式論やシュレディンガー作用素の確率的散乱理論といった申請者による近年の発展的な研究成果により明らかになった様々な重み付きマルコフ過程をめぐる確率論的諸問題およびその応用分野に関して、新しくより見通しの良い関数解析学的理論の新展開を構築する分野横断型研究の実施を目標とした。
- (2) もう一つの重要な本研究での目的としては、数理論物理学分野やシュレディンガー作用素論などにおいてその必要性が幅広く要求されつつある加法汎関数によるファインマン・カツ汎関数の重みをもつ対称マルコフ過程に関する大域的性質とその周辺問題を、必ずしも有界変動ではない加法汎関数によるファインマン・カツ汎関数の重みを扱う形で既存の結果を拡張することで、それから派生する新しい領域への関連応用問題を提案することであった。

3. 研究の方法

- (1) 本研究は、申請者と分担者である桑江一洋氏とで定期的に研究打ち合わせを実施することで共同研究を行い、その成果を連携研究者に検討をお願いする形で研究を進行させてきた。また、関連する最新の研究資料と情報の収集や類似分野の書籍・論文集などを購入することで、それらを通じて研究に必要な知識や手法も修得した。
- (2) アメリカ University of Washington の Z.-Q. Chen 氏や韓国ソウル大学の Panki Kim 氏、鹿児島高専の松浦将國氏など、国内外の他の関連研究者との定期的な研究打ち合わせや情報交換を行うことで、新しい応用分野への共同研究の実施とその研究成果を本研究に還元することができた。

4 . 研究成果

本研究期間中に挙げられた研究成果は以下の通りである。

(1) 一般の対称マルコフ過程により定まる飛躍を含む加法汎関数の散乱長の概念を拡張し、その一般論の構成を行った。特に、このように拡張した散乱長に対するカツツ型漸近公式を対称マルコフ過程に対応するディリクレ形式により定まる容量の概念を用いて拡張することができた。更に、特別な場合として、必ずしも有限の値域をもたない飛躍型ポテンシャルの散乱長に対する準古典極限問題について相対論的安定過程の枠組みで論じることで、既存の結果を飛躍型マルコフ過程までに拡張することができた（発表論文 を参照）。

(2) 一般化ファインマン・カツツ汎関数におけるゲージ理論とその解析的特徴付け問題における先行研究結果を用いて、一般化シュレディンガー形式によるシュレディンガー作用素の臨界性理論の構築、並びにその最大値原理に関する結果を拡張した。特に、シュレディンガー作用素の各臨界性を、一般化シュレディンガー形式と関連する関数不等式として特徴付けることができた（発表論文 を参照）。

(3) 古典的な散乱理論で現れる重要な物理量であるシュレディンガー作用素の散乱振幅や散乱長などの概念はポテンシャル関数により定義されるゲージ関数と深い関係があるが、飛躍型加法汎関数に対する散乱長の準古典的極限と容量との関連性について、対称安定過程の枠組みにおいてその特徴付けを与えた。このことは、ブラウン運動と連続ポテンシャルにおける既存の結果を飛躍型確率過程と飛躍型加法汎関数を含むポテンシャルまで拡張した意味をもつ（発表論文 ）。

(4) ランダムな媒質をもつ拡散過程は、その拡散過程がもつ2重のランダムネスが原因で、1次元の場合を除けば、拡散過程の長時間振る舞いやその大域的な性質を調べた研究結果は一部にしかない。この研究では、多次元ガウシアン媒質やレヴィー過程により誘導される直積媒質をもつ多次元拡散過程について、媒質の座標ポテンシャルにランダム性がないものが混じっている場合を考え、未解決の問題が多く残っている中での部分的な結果ではあるが、そのときの再帰性について一定の結果を究明することができた。（発表論文 ）。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Kim Daehong, Matsuura Masakuni	4. 巻 394
2. 論文標題 Scattering lengths for additive functionals and their semi-classical asymptotics	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Springer Proceedings in Mathematics and Statistics	6. 最初と最後の頁 253 ~ 278
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-981-19-4672-1_14	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Daehong Kim and Kazuhiro Kuwae	4. 巻 58(3)
2. 論文標題 Generalized Schrodinger forms with applications to maximum principles	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 731-753
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Daehong Kim and Masakuni Matsuura	4. 巻 167
2. 論文標題 Semi-classical asymptotics for scattering length of symmetric stable processes	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Statistics and Probability Letters	6. 最初と最後の頁 1-7
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.spl.2020.108921	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Daehong Kim and Seiichiro Kusuoka	4. 巻 25
2. 論文標題 Recurrence of direct products of diffusion processes in random media having zero potentials	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Electronic Journal of Probability	6. 最初と最後の頁 1-18
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1214/20-EJP540	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 Daehong Kim
2. 発表標題 On quasi-ergodic theorems for Feynman-Kac semigroups
3. 学会等名 マルコフ過程とその周辺
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Daehong Kim
2. 発表標題 On the upper rate functions of some time inhomogeneous diffusion processes
3. 学会等名 International Conference on Dirichlet forms and Related Topics (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Daehong Kim
2. 発表標題 Rate functions of certain time inhomogeneous diffusion processes via heat kernel estimates
3. 学会等名 マルコフ過程とその周辺
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Daehong Kim
2. 発表標題 Scattering lengths for positive additive functionals and their related problems
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会（特別講演、千葉大学）（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Daehong Kim
2. 発表標題 On the upper rate functions of time inhomogeneous diffusion processes
3. 学会等名 マルコフ過程とその周辺
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	桑江 一洋 (Kuwae Kazuhiro) (80243814)	福岡大学・理学部・教授 (37111)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------