

令和 5 年 5 月 9 日現在

機関番号：32634

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2022

課題番号：20K03640

研究課題名（和文）有限無限次元複素バナッハ空間の等質単位球上の正則写像に関する研究

研究課題名（英文）Studies on holomorphic mappings on the homogeneous unit ball in finite or infinite dimensional complex Banach spaces

研究代表者

本田 竜広（Honda, Tatsuhiro）

専修大学・商学部・教授

研究者番号：20241226

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,000,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、有限無限次元の JB^* -tripleの単位球上のハーディ空間とブロック型空間の間の重み付き合成作用素に拡張して考察し、重み付き合成作用素が有界やコンパクトになるための必要十分条件を与えた。また、ブロック型空間の間の合成作用素に関する研究では、多重円盤上のブロック空間から有限次元有界対称領域上のブロック空間への合成作用素が有界やコンパクトになるための必要十分条件を与えた。

他方、単位円盤上の正則関数や調和関数に対する Bohr 半径に関する様々な結果を、任意の複素バナッハ空間の単位球上の正則写像や多重調和写像に拡張した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

等質単位球をもつ複素バナッハ空間は、 JB^* -tripleである。 JB^* -tripleは、ジョルダン3重積の構造を備えており、その単位開球は、有界対称領域と同値な領域である。したがって、本研究結果は、有界対称領域上の正則写像の結果へと直結する。

また、ブロック関数について、小林計量を用いてブロックセミノルムを定義して、無限次元空間までブロック関数、ブロック空間の定義を拡張し、考察した。また、その応用として、有限次元の場合において、合成作用素・乗法作用素に関する様々な問題を解決し、無限次元の場合においても解明した。

研究成果の概要（英文）：In this project, we considered weighted composition operators between the Hardy space and the Bloch-type space on the unit ball of the finite or infinite dimensional JB^* -triple, and obtained necessary and sufficient conditions that the weighted composition operator is bounded or compact. In addition, in the research on composition operators between Bloch-type spaces, we gave necessary and sufficient conditions that the composition operator from \mathcal{B} -Bloch space on the polydisc to \mathcal{B} -Bloch space on the finite-dimensional bounded symmetric domain is bounded or compact.

On the other hand, we extended various results about the Bohr radii for holomorphic functions or harmonic functions on the unit disk to for holomorphic mappings or pluriharmonic mappings the unit ball of arbitrary complex Banach spaces.

研究分野：基礎解析学

キーワード：ブロック関数 ブロック空間 有界対称領域 多重調和写像 Bohr半径 劣多重調和関数

1. 研究開始当初の背景

Timoney 氏 (Bull. London Math., 1980, J. Reine Angew. Math., 1980) は、 \mathbb{C}^n 内の有界等質領域上の Bloch 関数について研究し、Shi 氏- Luo 氏 (Acta Math. Sinica, 2000) は、 \mathbb{C}^n 内のユークリッド単位球上の Bloch 空間や little Bloch 空間上の合成作用素の有界性やコンパクト性について研究した。無限次元の場合は、Blasco 氏-Galindo 氏-Miralles 氏 (J. Funct. Anal., 2014) が無限次元ヒルベルト空間の単位球上の Bloch 関数について研究していた。

作用素に関しては、Allen 氏-Colonna 氏 (J. Math. Anal. Appl. 355, 2009) は、 \mathbb{C}^n の有界対称領域 Ω 上の Bloch 空間 $\mathcal{B}(\Omega)$ において、正則写像 $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$ に対し、合成作用素 $C_\varphi(f) := f \circ \varphi$, $f \in \mathcal{B}(\Omega)$ が等長であるための同値な条件などを考察した。これらの結果に付随して、有界対称領域上の正則関数 $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ を用いた乗法作用素 $M_\psi : H(\Omega, \mathbb{C}) \rightarrow H(\Omega, \mathbb{C})$, $M_\psi(f) := \psi f$, $f \in H(\Omega, \mathbb{C})$ や、さらに、正則写像 $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega$ を用いた重み付き合成作用素 $W_{\psi, \varphi} : H(\Omega, \mathbb{C}) \rightarrow H(\Omega, \mathbb{C})$, $W_{\psi, \varphi}(f) := \psi(f \circ \varphi)$, $f \in H(\Omega, \mathbb{C})$ についても研究され、Colonna 氏- Easley 氏- Singman 氏 (J. Math. Anal. Appl. 382, 2011) は、 \mathbb{C}^n の有界対称領域 Ω 上の Hardy 空間 $H^\infty(\Omega) := \{f \in H(\Omega, \mathbb{C}) : \|f\|_\infty := \sup_{z \in \Omega} |f(z)| < +\infty\}$ から Bloch 空間 $\mathcal{B}(\Omega)$ への有界な重み付き合成作用素に関するノルム評価式を与え、濱田氏 (Complex Anal. Oper. Theory 12, 2018) は、等長な M_ψ は存在しないことを示していた。

2. 研究の目的

等質単位開球をもつ複素バナッハ空間は、ジョルダン 3 重積の構造を備えており、このバナッハ空間の単位開球は、有界対称領域と同値な領域である。この等質単位開球上において、Bloch 写像、さらに、Bloch 写像を位数 α を用いて拡張した α -Bloch 写像に関して、種々の評価を研究する。加えて、これらの関数全体が作る空間 (Bloch 空間、 α -Bloch 空間など) に関する様々な作用素の有界性やノルム評価を解明する。

3. 研究の方法

Bloch 写像、 α -Bloch 写像、合成作用素 C_φ , 乗法作用素 M_ψ および重み付き合成作用素 $W_{\psi, \varphi}$ に関して、下記のような研究の方法である。

- (i) $f \in H(\mathbb{B}_X, \mathbb{C})$ に対し、 $Q_f^\alpha(z) = \sup \left\{ \frac{|Df(z)x|}{\kappa(z, x)^\alpha} : x \in X \setminus \{0\} \right\}$ の評価を考察し、

有界性について解明する。また、 $\theta_\varphi^\alpha(z) := \sup\{Q_{f \circ \varphi}^\alpha(z) : f \in H^\infty(\mathbb{B}_X), \|f\|_\infty \leq 1\}$,
 $\theta_{\psi, \varphi}^\alpha := \sup_{z \in \mathbb{B}_X} |\psi(z)|\theta_\varphi^\alpha(z)$ の評価を考察する。

- (ii) 有限次元の等質単位球 \mathbb{B}_X 上の正則写像 $f \in H(\mathbb{B}_X, \mathbb{C})$ に対し、セミノルム $\|f\|_\alpha$ を $\|f\|_\alpha := \sup\{Q_f^\alpha(z) : z \in \mathbb{B}_X\}$ と定義する。ただし、この場合は、 \mathbb{B}_X 上のベルグマン作用素 $B(z, w)$ を用いて、 $Q_f^\alpha(z) := \sup\{|Df(z) \circ B(z, z)^{\alpha/2}(x)| : x \in X, \|x\|_X = 1\}$ とする。このとき、 $\|f\|_\alpha + \|f(0)\| < +\infty$, を満たす α -Bloch 写像に対し、 θ_φ^α および $\theta_{\psi, \varphi}^\alpha$ の評価を考察する。
- (iii) 上記の方法がうまくいかない場合は、Timoney 氏による Bloch 関数 f の定義に用いられたベルグマン計量により θ_φ および $\theta_{\psi, \varphi}$ の評価を再度考察する。

4. 研究成果

- (1) 複素平面内の単位開円盤 \mathbb{U} 上の正則関数や調和関数に対する諸性質について、高次元の複素バナッハ空間の単位開球 \mathbb{B} 上の正則写像や調和写像に対して拡張した。また、 \mathbb{B} 上の凸型写像に付随する正則写像のクラスに対する Bohr の不等式や、 \mathbb{B} 上の多重調和写像に対する Bohr の不等式を与えた。さらに、 \mathbb{B} 上の有界な多重調和写像に対する p -Bohr 半径を得て、ある条件を満たす正則写像のクラスに対する Bohr 半径を決定した。
- (2) Bloch 型空間に関しては、位数 α, β を用いて拡張した α -Bloch 型空間に着目し、JB*-triple X の単位球 \mathbb{B}_X 上の α -Bloch 型空間から β -Bloch 型空間への合成作用素 C_φ について考察した。その成果として、多重円盤 \mathbb{U}^n 上の α -Bloch 型空間から有限次元有界対称領域上の β -Bloch 型空間への合成作用素の有界性について、その必要十分条件を与えた。また、多重円盤 \mathbb{U}^n 上の α -Bloch 型空間から多重円盤 \mathbb{U}^m 上の β -Bloch 型空間への合成作用素 C_φ が有界となるための同値な条件を示した。さらに、この合成作用素 C_φ のコンパクト性についても、必要条件を示した。
- (3) 無限次元の JB*-triple X の単位開球 \mathbb{B}_X 上の Hardy 空間 $H^\infty(\mathbb{B}_X) := \{f \in H(\mathbb{B}_X, \mathbb{C}) : \|f\|_\infty := \sup_{z \in \mathbb{B}_X} |f(z)| < +\infty\}$ から α -Bloch 空間 $\mathcal{B}^\alpha(\mathbb{B}_X)$ への重み付き合成作用素 $W_{\psi, \varphi}$ が有界であるための必要十分条件を与えた。また、 $H^\infty(\mathbb{B}_X)$ から $\mathcal{B}^\alpha(\mathbb{B}_X)$ への乗法作用素 M_ψ が有界であるための必要十分条件を与え、等長な M_ψ は存在しないことを示した。

- (4) 複素ノルム空間の開領域における境界距離関数 d に対し、関数 $-\log d$ が劣多重調和関数であることを示した。さらに、複素プレ・ヒルベルト空間上のリーマン領域の境界距離関数 d に対し、関数 $-\log d$ が局所劣多重調和関数であることを示した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Hamada, Hidetaka; Honda, Tatsuhiko	4. 巻 16-1, PaperNo.6
2. 論文標題 Composition Operators of Bloch-Type Spaces on Bounded Symmetric Domains	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Complex Analysis and Operator Theory	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11785-021-01182-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Hamada, Hidetaka; Honda, Tatsuhiko; Mizota, Yusuke	4. 巻 23-4
2. 論文標題 Bohr phenomenon on the unit ball of a complex Banach space	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematical Inequalities & Applications	6. 最初と最後の頁 1325 ~ 1341
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.7153/mia-2020-23-98	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 本田竜広、濱田英隆、溝田裕介
2. 発表標題 Bohr's phenomenon on a complex Banach space
3. 学会等名 2020 年度日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------