

令和 6 年 6 月 19 日現在

機関番号：82723

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03646

研究課題名（和文）時間発展するグラフの関数解析学的研究とその応用

研究課題名（英文）Functional analysis approach to time evolution of graphs and its application

研究代表者

瀬戸 道生（Seto, Michio）

防衛大学校（総合教育学群、人文社会科学群、応用科学群、電気情報学群及びシステム工学群）・総合教育学群
・教授

研究者番号：30398953

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,100,000円

研究成果の概要（和文）：1. de Branges-Rovnyak カーネルの研究（桑原氏との共同研究）を経て、フォック空間のテンソル代数構造を応用した正定値カーネルの理論への新しいアプローチを得た。特に、十分に一般的な仮定の下で指数関数型カーネル関数が狭義正定値となることを示した。
2. 再生核ヒルベルト空間の基礎理論とカーネル法の数学的な原理について丁寧な解説を試みた教科書「機械学習のための関数解析入門（ヒルベルト空間とカーネル法）」とその応用編である「機械学習のための関数解析入門（カーネル法実践：学習から制御まで）」を内田老鶴圃から出版した（伊吹氏、畑中氏、山内氏との共同研究）。

研究成果の学術的意義や社会的意義

1. 近年、正定値カーネルの理論は機械学習に応用され注目を集めた。そのため、本研究で正定値カーネルの理論に対し新しいアプローチを与えたことは、理論上だけでなく応用上も意義があると考えられる。特に、単位開円板上の擬双曲距離から狭義正定値カーネルの新しい例を構成したが、この例は数学の理論上興味深いだけでなく、機械学習への応用も期待できるものである。
2. 「機械学習のための関数解析入門」の出版は工学界に一定のインパクトがあったと考えられる。実際、工学系の学会誌に好意的な書評が掲載された。また、数学を専攻する学生に対しても、応用へ目を向けるきっかけを提供できたと考えている。

研究成果の概要（英文）：1. We obtained a new approach to the theory of positive definite kernels. Our approach is based on the structure of Fock spaces. We showed that Gauss type kernel functions belonging to a certain wide class are strictly positive definite. In particular, the Gauss type kernel function constructed from the pseudo-hyperbolic distance on the open unit disk is included in our class. Moreover, as a by-product of this idea, we had a new proof of the universal approximation theorem for Gauss type kernel functions.
2. We published "Introduction to Functional Analysis for Machine Learning" consisting of two volumes from Uchida Rokakuho. In these books, we attempted to give a friendly approach to the theory of reproducing kernel Hilbert spaces, kernel method in machine learning and their applications. This is the joint work with Ibuki, Hatanaka and Yamauchi.

研究分野：関数解析

キーワード：関数解析 グラフ理論 機械学習

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

- (1) 有限グラフの増大列から有限次元再生核ヒルベルト空間の埋め込み(包含ではない)の列が構成される。そこに、de Branges-Rovnyak 理論を適用できる。さらに、グラフの時間発展には de Branges-Rovnyak-Vasyunin-Nikolskii により開発された擬直交積分の理論を適用できる。これは研究代表者が 2020 年までの研究で気づいたことである。このアイデアをもとに、これまでにグラフの連結成分やラプラシアンに関する不等式を複数得た。さらに興味深いことに、この純関数解析的に得られた結論にグラフの自己同型群が自然に関わることに気づいた。これが本研究課題着想のきっかけである。そこで、本研究では、研究代表者が気づいた上記の枠組みにおいて、グラフの増大列や時間発展の構造をグラフの自己同型群の作用に着目して研究することを目標とした。
- (2) この 10 年の間、人工知能との関連で機械学習という言葉が広く世間に知られるようになった。機械学習におけるカーネル法(正定値性をもとにしたデータの変換方法)は本研究課題のキーワードの一つである再生核ヒルベルト空間の応用である。また、機械学習において、データをグラフに変換することや、グラフそのものがデータとして扱われることはよく見られる。このような状況に鑑みて、本研究課題の機械学習への応用が期待される。そこで、本研究課題の応用部門では、本研究で得られた知見を、グラフをベースとした機械学習に応用することを目標とした。

2. 研究の目的

- (1) 本研究の理論部門として、グラフの増大列、さらに時間発展するグラフの族に de Branges-Rovnyak 理論、擬直交積分の理論を適用し、そこから得られる様々な構造とグラフの自己同型群との関係の解明を試みる。
- (2) 本研究の応用部門として、カーネル法を経由して、グラフをベースとした機械学習に本研究で得られた知見を応用することを試みる。特に、関数解析の機械学習への応用に関する教科書を執筆する。

3. 研究の方法

- (1) グラフの増大列に対し de Branges-Rovnyak 理論を用いて定められる一種のコホモロジー空間の構造を調べる。特に、具体的なグラフに関するこの空間の次元を計算し、その次元とグラフ理論的な不変量との関連を探る。具体的なグラフの計算は研究分担者である谷口氏(広島工業大)と協力して行う。
- (2) 研究代表者のカーネル法に関する講義ノートをもとに、本研究の機械学習への応用を視野に入れ、関数解析の機械学習への応用に関する教科書を執筆する。

4. 研究成果

- (1) 本研究課題と機械学習との関連を模索する中で、関数解析側の視点で狭義正定値カーネルの構成法に関する問題が見逃されていることに気づいた。もちろん、この問題に関しては古くからポホナーの定理が知られているが、フーリエ変換が直接使えない場合に新規参入の余地があるように思えた。実際、単位開円板上の正則関数の理論、特に de Branges-Rovnyak カーネルの理論をもとにして、狭義正定値カーネルが大量に構成できることを示した。この成果は研究協力者である桑原氏(札幌静修高校)との共著論文として専門誌に出版された。なお、この成果は論文へとつながる。
- (2) 荷見氏(茨城大)と非有界作用素のスペクトルに関する研究を行った。特に、整関数の理論における位数の概念をスペクトルが空な非有界作用素の理論に導入し、それに関する例をいくつか構成した。この成果は共著論文として専門誌に出版された。この研究を開始した当初は本研究課題と直接関連するものではないと考えていたが、論文で本質的に非有界作用素を扱う必要があり、この論文での経験が活かされた。
- (3) 論文の発表直後、カーネル関数の構成法について、フォック空間のテンソル代数構造が利用できることに気づいた。このアイデアの応用として、十分に一般的な仮定の下で指数関数型カーネル関数の狭義正定値性を証明することができた。特に、単位開円板上の擬双曲距離から構成される指数関数型カーネル関数とその一例であるが、この例そのものが本質的に新しいものと思われる。さらに、このアイデアの副産物として、指数関数型カーネル関数に対する普遍近似定理の比較的簡単な新しい証明が得られた。これらの結果は論文としてまとめ、専門誌に出版された。なお、この成果は下記の(5)とも関連する。

- (4) 研究協力者である畑中氏（東工大）、伊吹氏（明治大）と関数解析の機械学習への応用を扱った教科書 を 2021 年に出版した。本書では、一般の理工系学部学生を読者として想定し、再生核ヒルベルト空間の基礎理論とカーネル法の数学的な原理について丁寧な解説を試みた。本書は制御と数学の分野の垣根を超えた共同執筆であり、和書ではこのような例は少ないと思われる。実際、工学系の学会誌「システム/制御/情報」(2022 年 66 巻 7 号) に好意的な書評が掲載され、本邦の工学界に一定のインパクトがあったようである。なお、このプロジェクトは下記の(5)へと続く。
- (5) 上の(4)のプロジェクトを継続し、山内氏（東京大）を研究協力者に加えて教科書 の姉妹編となる実践的な応用を扱った教科書 を 2023 年に出版した。教科書 、 の出版により本研究の応用部門から発展したプロジェクトは当初の期待を超える形で終了できた。このプロジェクトから派生した 2 つの萌芽的な研究をここで述べておく。まず、論文 で得られた狭義正定値カーネルの機械学習への応用を考察した。この研究は本研究課題の期間中に論文としてまとめることはできなかったが、今後も継続すべき研究テーマである。次に、共著者から受けた影響を整理し、一般の理工学系大学院における数学の講義を想定した関数解析の入門的な教科書を現在執筆中である。その内容の一部である制御理論と関数解析の関係を神楽坂解析セミナー（東京理科大学、2023 年 11 月 25 日）で発表した。
- (6) 研究集会「Real, Complex and Functional Analysis Seminar」(オンライン、2020 年 12 月 13 日、2021 年 12 月 18 日)を澤野氏（中央大）、菱川氏（岐阜大）と共同で開催した。また、講演者として、2020 年の回には の原稿の一部をもとにガウス過程回帰に関する入門的な講義を行い、2021 年の回には の結果を紹介した。この研究集会を開催した経験が下記(7)につながった。
- (7) 研究集会「再生核ヒルベルト空間を中心とした実解析・複素解析・函数解析の総合的研究」(京都大学数理解析研究所、2022 年 10 月 26 日~28 日)を主催した。海外からは Deepak 氏 (Indian Statistical Institute Bangalore Centre) の参加があり、本研究課題から滞在費を一部支出した。また、講演者として、論文 の前段階的な結果を発表した。なお、翌年 2023 年には、研究集会「関数空間を中心とした実解析・複素解析・函数解析の総合的研究」(京都大学数理解析研究所、2023 年 10 月 18 日~20 日)が澤野氏（中央大）の主催により開催された。今後もこの研究集会を継続することを計画している。
- (8) 上記の(7)で述べた Deepak 氏の訪日の機会を活用し、名古屋大学の博士後期課程の学生である荒神氏も交え、二重開円板上の不変距離に関する共同研究を行った。この研究では、二重開円板上の不変距離を不定値内積空間の単位球の言葉に翻訳し(特に単位球の自己同型群を考えた)、二重開円板上で定義された正則写像に対するシュワルツ・ピック型の定理を線形代数的に証明した。この成果は共著論文として専門誌に投稿し、現在査読中である。なお、この研究の最終的な結論を得るにあたり、フィンランドで開催された IWOTA 2023 における研究発表での質疑応答とその前後の討論は非常に有益であった。
- (9) 研究代表者は関数解析を専門とするが、グラフ理論については素人であるため、グラフ理論の専門家である谷口氏（広島工業大）に研究分担者として本研究に参加してもらった。しかしながら、2020 年と 2021 年はコロナウィルスの世界的な流行により行動が制限される状況にあり、当初に期待したような共同研究を行うことができなかった。2022 年の後半からグラフの増大列と自己同型群に関する研究を谷口氏と本格的に再始動し、今後の論文出版につながる有意義な議論を行うことができたが、残念ながら研究期間の前半に生じた遅れを取り戻すことなく本研究課題の研究期間は終了してしまった。この研究は論文の出版を目標に今後も継続させる予定である。

<引用文献>

- Kuwahara Shuhei, Seto Michio, Exponentials of de Branges-Rovnyak kernels. *Canad. Math. Bull.* 65 (2022), no.2, 447-455.
- Hasumi Morisuke, Seto Michio, Linear operators with empty spectrum. *Kyushu J. Math.* 77 (2023), no.1, 63-73.
- Seto Michio, A Fock space approach to the theory of kernel functions. *Positivity* 28 (2024), no.1, Paper No. 9, 11 pp.
- 瀬戸 道生、伊吹 竜也、畑中 健志、「機械学習のための関数解析入門(ヒルベルト空間とカーネル法)」、内田老鶴圃、2021 年
- 伊吹 竜也、山内 淳矢、畑中 健志、瀬戸 道生「機械学習のための関数解析入門(カーネル法実践：学習から制御まで)」、内田老鶴圃、2023 年

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Shuhei Kuwahara, Michio Seto	4. 巻 65
2. 論文標題 Exponentials of de Branges-Rovnyak kernels	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Canadian Mathematical Bulletin	6. 最初と最後の頁 447-455
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4153/S0008439521000400	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Morisuke Hasumi, Michio Seto	4. 巻 77
2. 論文標題 Linear operators with empty spectrum	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Kyushu Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 63-73
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2206/kyushujm.77.63	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Michio Seto	4. 巻 28
2. 論文標題 A Fock space approach to the theory of kernel functions	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Positivity	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11117-023-01028-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 瀬戸 道生
2. 発表標題 フォック空間とガウス型核に対する普遍近似定理
3. 学会等名 再生核ヒルベルト空間を中心とした実解析・複素解析・函数解析の総合的研究（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 瀬戸 道生
2. 発表標題 狭義正定値核の構成法について
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 瀬戸 道生
2. 発表標題 正則性 vs 正定値性
3. 学会等名 日本数学会2023年度秋季総合分科会（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Michio Seto
2. 発表標題 An indefinite Schwarz-Pick inequality on the bidisk
3. 学会等名 34th International Workshop on Operator Theory and its Applications (IWOTA 2023) (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計2件

1. 著者名 瀬戸 道生、伊吹 竜也、畑中 健志	4. 発行年 2021年
2. 出版社 内田老鶴圃	5. 総ページ数 168
3. 書名 機械学習のための関数解析入門（ヒルベルト空間とカーネル法）	

1. 著者名 伊吹 竜也、山内 淳矢、畑中 健志、瀬戸 道生	4. 発行年 2023年
2. 出版社 内田老鶴圃	5. 総ページ数 176
3. 書名 機械学習のための関数解析入門（カーネル法実践：学習から制御まで）	

〔産業財産権〕

〔その他〕

https://researchmap.jp/mseto

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	谷口 哲至 (Taniguchi Tetsuji) (90543728)	広島工業大学・工学部・准教授 (35403)	
研究分担者	細川 卓也 (Hosokawa Takuya) (90553579)	茨城大学・理工学研究科（工学野）・准教授 (12101)	
研究分担者	阿部 敏一 (Abe Toshikazu) (40749157)	茨城大学・理工学研究科（工学野）・講師 (12101)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	畑中 健志 (Hatanaka Takeshi)		
研究協力者	伊吹 竜也 (Ibuki Tatsuya)		
研究協力者	山内 淳矢 (Yamauchi Jyunya)		
研究協力者	桑原 修平 (Kuwahara Shuhei)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 再生核ヒルベルト空間を中心とした実解析・複素解析・函数解析の総合的研究	開催年 2022年～2022年
---	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
インド	Indian Statistical Institute		