

令和 6 年 6 月 19 日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03650

研究課題名(和文) Banach空間上のスペクトル保存写像とその応用

研究課題名(英文) On spectrum preserving maps on Banach spaces and its application

研究代表者

三浦 毅 (Miura, Takeshi)

新潟大学・自然科学系・教授

研究者番号：90333989

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：複素平面の単位開円板上で定義された複素数値連続関数で、さらに単位開円板において正則であるものに対して、その導関数が連続であるもの全体のなすBanach空間を考察し、その上の全射等距離写像の形を完全に決定した。この研究を発展させ、単位開円板上の有界正則関数に対しても類似の結果が成り立つことが示された。さらにBanach空間全体で定義された等距離写像だけでなく、その単位球面上で定義された全射等距離写像に関する未解決問題であるTingley問題にも取り組み、関数環やある種の微分構造を有するBanach空間に対してTingley問題が肯定的であることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

1985年にNovinger and Oberlinは、連続な導関数をもつ単位開円板上のHardy空間 $H^p$ 関数全体に対して、その間の線形等距離写像の形を決定した。この定理は $1 < p < \infty$  に対して示されているが、 $p = \infty$  のときは対応する結果が知られていなかった。本研究では連続な導関数をもつ $H^\infty$  関数全体に対して、その間の等距離写像を解明した。その際、Novinger and Oberlinの定理とは異なり、全射性を必要とするが、線形性を仮定することなく、等距離写像の構造を決定することに成功した。またTingley問題は世界的に活発な研究がなされている未解決問題であるが、その部分的解答も与えている。

研究成果の概要(英文)：We have analyzed the structures of surjective, not necessarily linear, isometries between Banach spaces. For example, we have characterized surjective isometries on the Banach space of all continuous complex valued functions on the closed unit disk, which are analytic on the open unit disk with continuous derivatives on the closed unit disk. Motivated by the above result, we attacked a similar problem for a Banach space of bounded analytic functions with continuous derivatives on the open unit disk. We have characterized surjective isometries on the Banach space. A similar result was obtained by Novinger and Oberlin in 1985 for a Banach space of analytic functions on the open unit disk, whose  $p$ -th power are integrable with continuous derivatives on the closed unit disk. In addition, we have obtained some results on Tingley's problem for some Banach spaces including function algebras and abstract function spaces with continuous derivatives.

研究分野：可換Banach環理論

キーワード：可換Banach環 関数環 等距離写像 Tingley's problem Mazur-Ulam property

### 1. 研究開始当初の背景

Banach 空間とは、線形空間に絶対値を抽象化した構造であるノルムが定められ、ノルムから定まる距離に関して極限操作が自由に行える数学的对象である。等距離写像の研究は Banach により創始されたとされる。実際、Banach は 1932 年に、コンパクト距離空間  $K, L$  上の実数値連続関数全体のなす Banach 空間  $C(K, R)$  と  $C(L, R)$  の間の全射等距離写像の構造を解明した。その後、様々な Banach 空間の間の等距離写像が研究されてきた。Banach の研究では、全射等距離写像に線形性を仮定せず、その構造を調べているのに対して、他の多くの研究では線形な等距離写像を考察している。Banach の研究の背景には、ノルム空間の間の全射等距離写像はアフィンであることを主張する Mazur—Ulam の定理がある。それにも関わらず、Banach 空間の間の、線形とは限らない全射等距離写像の構造は多くの Banach 空間に対して知られていないようである。

### 2. 研究の目的

様々な Banach 空間に対して、それらの間の全射等距離写像の構造は、線形性を仮定することにより解明されている。一方で Banach や Mazur and Ulam の研究を思い起こせば、線形とは限らない全射等距離写像の構造が解明されるべきである。本研究では具体的な Banach 空間に対して、その間の全射等距離写像を決定する。特に、1985 年の Novinger and Oberlin の定理で考察された単位開円板上の Hardy 空間  $H^p(D)$  に付随する Banach 空間  $S^p(D)$  に関して、未解決であった  $p=$  の場合について解明する。Novinger and Oberlin は、 $S^p(D)$  の間の全射とは限らない線形等距離写像を決定したが、本研究では全射性を仮定するかわりに、線形とは限らない等距離写像を考察する。

Tingley は 1987 年に、任意の実 Banach 空間の単位球面の間の全射等距離写像は、Banach 空間の間の全射等距離写像に拡張可能か、を問うた。それ以来、この問題は Tingley 問題と呼ばれ、現在でも未解決のまま世界中で活発な研究がなされている。本研究においては、関数環や Hardy 空間に付随する Banach 空間などに対して、Tingley 問題を考察する。例えば関数環の単位球面の間の全射等距離写像は、関数環の間の全射等距離写像に拡張されるかを考察する。

### 3. 研究の方法

Banach による実数値連続関数空間  $C(K, R)$  と  $C(L, R)$  の間の全射等距離写像の解明方法は、様々な Banach 空間に対する研究を通して改良された。その中で、双対空間の閉単位球の端点が共役作用素によって保存されることを用いる手法は、線形とは限らない全射等距離写像に対してどの程度適用できるのかを調べる必要がある。実際、Mazur—Ulam の定理により、全射等距離写像は実線形であると仮定しても一般性を失わないので、複素線形とは限らない実線形等距離写像を考察しなければならない。双対空間の閉単位球の端点を調べる方法は、どのような Banach 空間の間の全射等距離写像に対して適用できるかを知る上で、具体的な Banach 空間に対する考察が重要な鍵を握る。まずは具体的な Banach 空間を調べ、より一般の Banach 空間の間の全射等距離写像の構造解明に取り組む。

### 4. 研究成果

(1) Novinger and Oberlin の定理の  $p=$  の場合を解決するため、単位開円板上の正則関数で、その導関数が円板環に属するもの全体のなす Banach 空間を定義し、その間の全射等距離写像の構造を解明した。この Banach 空間には 3 種類のノルムが自然に定義される。本研究ではこれらすべてのノルムに関する全射等距離写像を完全に決定することができた。この空間上の全射等距離写像を解明する手法を詳細に吟味することにより、Novinger and Oberlin の定理の  $p=$  の場合を解決することができた。Novinger and Oberlin の結果が 1985 年に発表されて以来、 $p=$  の場合は残されたままでいたが、本研究においてそれを解明することに成功した。

(2) 等距離写像の研究に関連して、局所的な等距離写像の研究を考察した。この研究は Semrl によって創始された局所的 derivation に由来するものである。単位閉区間  $[0, 1]$  上の連続微分可能な複素数値関数全体のなす Banach 空間と、単位開円板  $D$  上の正則関数で、その導関数が Hardy 空間  $H^p(D)$  に属するもの全体のなす Banach 空間に対して、その間の局所的な等距離写像の構造を解明した。

(3) 局所コンパクト Hausdorff 空間  $X$  上の複素数値連続関数で、無限遠点において 0 となる関数全体のなす Banach 空間を  $C_0(X)$  で表す。 $C_0(X)$  の閉部分多元環で、 $X$  の点を分離するものを uniformly closed function algebra on  $X$  と呼ぶ。これは古典的な関数環に対して、積の単位元の存在を仮定しない対象と考えることができる。 $A, B$  をそれぞれ局所コンパクト Hausdorff 空間  $X, Y$  上の uniformly closed function algebras とし、 $S(A), S(B)$  をそれぞれ  $A, B$  の単位球面とする。このとき  $S(A)$  から  $S(B)$  への任意の全射等距離写像  $T$  に対して、 $A$  上で  $T$  をみた

すような  $A$  から  $B$  への全射等距離写像  $T$  が存在することを示した。  $A, B$  が関数環である場合は Hatori, Oi and Shindo によって示された結果となる。

(4) Hatori は Tingley 問題が肯定的に解決されるための Banach 空間に対する十分条件を与え、その一つを Hausdorff distance condition を呼んでいる。 Hausdorff distance condition はみたさないが、Tingley 問題が肯定的に解決される Banach 空間のクラスを導入し、それを証明した。たとえば単位閉区間  $[0, 1]$  上の連続微分可能な複素数値関数全体のなす複素線形空間に対して、導関数の最大絶対値と 0 における値の絶対値の和をノルムとする Banach 空間  $A$  は、このクラスに属することを示した。より正確には  $S(A)$  を  $A$  の単位球面とすれば、 $S(A)$  からそれ自身への全射等距離写像  $T$  に対して  $A$  上で  $T = T$  をみたす  $A$  からそれ自身への全射等距離写像  $T$  が存在することを示した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計17件（うち査読付論文 17件 / うち国際共著 5件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Cabezas David, Cueto-Avellaneda Maria, Enami Yuta, Miura Takeshi, Peralta Antonio M.	4. 巻 17
2. 論文標題 Tingley's problem for complex Banach spaces which do not satisfy the Hausdorff distance condition	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Banach Journal of Mathematical Analysis	6. 最初と最後の頁 1-34
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s43037-023-00291-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Miura Takeshi, Niwa Norio	4. 巻 89
2. 論文標題 Surjective isometries on a Banach space of analytic functions with bounded derivatives	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Acta Scientiarum Mathematicarum	6. 最初と最後の頁 109 ~ 145
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s44146-023-00062-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Cueto-Avellaneda Maria, Hirota Daisuke, Miura Takeshi, Peralta Antonio M.	4. 巻 46
2. 論文標題 Exploring new solutions to Tingley's problem for function algebras	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Quaestiones Mathematicae	6. 最初と最後の頁 1315 ~ 1346
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2989/16073606.2022.2072787	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Jimenez-Vargas A., Miura Takeshi	4. 巻 46
2. 論文標題 Approximate local isometries of derivative Hardy spaces	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Quaestiones Mathematicae	6. 最初と最後の頁 23 ~ 34
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2989/16073606.2021.1985007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Koshimizu Hironao, Miura Takeshi	4. 巻 45
2. 論文標題 2-local real-linear isometries on $C^1([0, 1])$	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Quaestiones Mathematicae	6. 最初と最後の頁 1353 ~ 1361
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2989/16073606.2021.1944392	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Cabezas David, Cueto-Avellaneda Maria, Hirota Daisuke, Miura Takeshi, Peralta Antonio M.	4. 巻 13
2. 論文標題 Every commutative $JB^*$ -triple satisfies the complex Mazur-Ulam property	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Annals of Functional Analysis	6. 最初と最後の頁 1-8
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s43034-022-00204-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Cueto-Avellaneda Maria, Enami Yuta, Hirota Daisuke, Miura Takeshi, Peralta Antonio M.	4. 巻 643
2. 論文標題 Surjective isometries between unitary sets of unital $JB^*$ -algebras	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6. 最初と最後の頁 39 ~ 79
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.laa.2022.02.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Miura Takeshi, Niwa Norio, Oka Hirokazu, Takahasi Sin-Ei	4. 巻 77
2. 論文標題 A special noncommutative semigroup operation on the real numbers and left or right distribution	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Results in Mathematics	6. 最初と最後の頁 1-13
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00025-021-01588-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Miura Takeshi, Niwa Norio, Oka Hirokazu, Takahasi Sin-Ei	4. 巻 168
2. 論文標題 Special noncancellative commutative semigroup operations on the real numbers and distribution	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Acta Mathematica Hungarica	6. 最初と最後の頁 363 ~ 372
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10474-022-01285-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Koshimizu Hironao, Miura Takeshi	4. 巻 online first
2. 論文標題 2-Local real-linear isometries on $C^1([0, 1])$	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Quaestiones Mathematicae	6. 最初と最後の頁 1 ~ 9
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2989/16073606.2021.1944392	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Jimenez-Vargas A., Miura Takeshi	4. 巻 online first
2. 論文標題 Approximate local isometries of derivative Hardy spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Quaestiones Mathematicae	6. 最初と最後の頁 1 ~ 12
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2989/16073606.2021.1985007	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hatori Osamu, Oi Shiho, Shindo Togashi Rumi	4. 巻 503
2. 論文標題 Tingley's problems on uniform algebras	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 125346 ~ 125346
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2021.125346	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 OI SHIHO	4. 巻 111
2. 論文標題 A SPHERICAL VERSION OF THE KOWALSKI'S?ODKOWSKI THEOREM AND ITS APPLICATIONS	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of the Australian Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 386 ~ 411
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S1446788720000452	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takahasi Sin-Ei, Miura Takeshi, Oka Hirokazu	4. 巻 100
2. 論文標題 Characterization of distributive semigroup operations on the positive real numbers	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Semigroup Forum	6. 最初と最後の頁 585 ~ 604
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00233-019-10006-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T.-Miura and N.-Niwa	4. 巻 31
2. 論文標題 Surjective isometries on a Banach space of analytic functions on the open unit disc, II	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Nihonkai Math. J.	6. 最初と最後の頁 75--91
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Oka Hirokazu, Miura Takeshi, Takahasi Sin-Ei	4. 巻 86
2. 論文標題 Semigroup operations which are distributive over a given semigroup operation on positive real numbers	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Acta Scientiarum Mathematicarum	6. 最初と最後の頁 493 ~ 502
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14232/actasm-020-116-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Oka Hirokazu, Miura Takeshi, Takahasi Sin-Ei	4. 巻 101
2. 論文標題 Semigroup operations distributed by natural noncancellative semigroup operations on the positive real numbers	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Semigroup Forum	6. 最初と最後の頁 152 ~ 161
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00233-019-10073-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計20件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 榎並 優太, 三浦 毅
2. 発表標題 Surjective isometries on the Banach algebra of analytic functions with $C^n$ -boundary values
3. 学会等名 日本数学会 (中央大学)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 三浦 毅, 廣田 大輔
2. 発表標題 Tingley's problem for uniformly closed function algebras
3. 学会等名 日本数学会 (中央大学)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 三浦 毅
2. 発表標題 The Hausdorff distance conditionをみたさない関数空間に対する Tingley問題
3. 学会等名 関数環研究集会 (新潟大学)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takeshi Miura
2. 発表標題 Surjective isometries on function spaces
3. 学会等名 Operators on Banach algebras and related topics (Tarbiat Modares University) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takeshi Miura
2. 発表標題 Tingley's problem for some function spaces
3. 学会等名 Operators on Banach algebras and related topics (Tarbiat Modares University) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 丹羽典朗, 三浦毅
2. 発表標題 正則関数からなるLipschitz空間上の全射等距離写像について
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 M. Cueto-Avellaneda, D. Hirota, T. Miura and A.M. Peralta
2. 発表標題 Tingley's problem for uniformly closed function algebras
3. 学会等名 Research on preserver problems on Banach algebras and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 三浦毅
2. 発表標題 Tingley's problem for uniformly closed function algebras
3. 学会等名 関数環研究集会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 大井志穂
2. 発表標題 2-local isometries on commutative Banach algebras
3. 学会等名 日本数学会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Shiho Oi
2. 発表標題 Surjective isometries on Banach algebras of Lipschitz maps taking values in a unital $C^*$ -algebra
3. 学会等名 the 8th European Congress of Mathematics-8ECM
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Surjective linear isometries on unital $C^*$ -algebra valued Lipschitz algebras
2. 発表標題 Shiho Oi
3. 学会等名 Research on preserver problems on Banach algebras and related topic (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 大井志穂
2. 発表標題 $C^*$ 環に値をとるリブシツ環の間の等距離写像
3. 学会等名 第60 回実函数論・函数解析学合同シンポジウム(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 大井志穂
2. 発表標題 リブシツ写像のなすBanach 環の距離構造と代数構造
3. 学会等名 2021年度ジェネラルトポロジーシンポジウム(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 大井志穂
2. 発表標題 $C^*$ 環に値をとる連続写像のなすバナッハ環上のJordan*同型写像
3. 学会等名 2021年度関数環研究集会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 丹羽典朗, 三浦毅
2. 発表標題 正則関数からなるLipschitz空間上の全射等距離写像について
3. 学会等名 日本数学会(慶應義塾大学・オンライン開催)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 三浦毅
2. 発表標題 $C^1$ 空間と円板環のある部分環
3. 学会等名 関数環研究集会（オンライン開催）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 三浦毅
2. 発表標題 単位開円板上の正則関数のなすBanach空間とその上の全射等距離写像
3. 学会等名 作用素論・作用素環論研究集会2020（オンライン開催）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 丹羽典朗，三浦毅
2. 発表標題 正則関数からなるBanach空間上の全射等距離写像について，II
3. 学会等名 日本数学会（熊本大学・オンライン開催）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 三浦毅
2. 発表標題 正則関数のなすリプシッツ空間上の全射等距離写像
3. 学会等名 日本数学会（熊本大学・オンライン開催）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 古清水大直, 三浦毅
2. 発表標題 関数環に値をとるC^1空間とその上の全射等距離写像
3. 学会等名 日本数学会 (熊本大学・オンライン開催)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	大井 志穂 (Oi Shiho) (90891789)	新潟大学・自然科学系・助教  (13101)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------