

令和 5 年 5 月 8 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2022

課題番号：20K03651

研究課題名(和文) フーリエ積分と特異積分に関する基礎的・応用的研究

研究課題名(英文) Research on Fourier integrals and singular integrals

研究代表者

佐藤 秀一 (SATO, Shuichi)

金沢大学・人間社会研究域・客員研究員

研究者番号：20162430

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：non-isotropic dilation に付随した距離により定義された n 次元 Euclid 空間のボール上の平均により構成された Littlewood-Paley (L-P) 関数により Sobolev 空間の特徴づけが証明された。このような L-P 関数は、次数の高い Sobolev 空間に対しては平均をとる作用を次数に関係して繰り返すことにより定義される。これは通常の Euclid ノルム, dilation に対して考えられる Sobolev 空間に対しても新しい結果である。この結果に類似の Sobolev 空間の特徴づけが n 次元 Euclid 空間の球面上の平均により構成された

研究成果の学術的意義や社会的意義

n 次元 Euclid 空間のボール上の平均により構成された Littlewood-Paley (L-P) 関数により Sobolev 空間の特徴づけが証明された。このような L-P 関数は、次数の高い Sobolev 空間に対しては平均をとる作用を次数に関係して繰り返すことにより定義される。これは通常の Euclid ノルム, dilation に対して考えられる Sobolev 空間に対しても新しい結果である。この結果に類似の Sobolev 空間の特徴づけが n 次元 Euclid 空間の球面上の平均により構成された L-P 関数により証明された。

研究成果の概要(英文)：The weighted Sobolev spaces with weights of the Muckenhoupt class are characterized by the square functions of Marcinkiewicz type defined by repeated averaging operations over balls or spheres. We considered some maximal singular integral operators with variable kernels on \mathbb{R}^n with doubling measures and proved L_p and weak type estimates for them under certain sharp conditions. A survey on k -plane transforms are completed.

研究分野：基礎解析学

キーワード：Fourier series singular integrals square functions

1. 研究開始当初の背景

今回の研究課題には従来の研究課題の中でもテーマとして取り上げてきた問題でいまだ解決していない問題が多い。これらの解決のために関係する研究会に積極的に出席し、それまで得られた結果の研究発表(講演)等を行っている。さらに、同じ興味を持つ研究者との討論に努め研究課題の解決に向けて努力している。特に、海外共同研究者、D. Fan 氏(Department of Mathematics, University of Wisconsin-Milwaukee) との共同研究により研究課題に関連した問題に関していくつかの共著論文を発表している。さらに、北京師範大学を訪問し、Y. Ding 氏と研究課題に関係したいくつかの問題について討論し、共著論文を発表している。

2. 研究の目的

研究目的は以下の通りである。ユークリッド空間、多様体、ベキ零 Lie 群(特に homogeneous group(斉次群))及びそれらの空間の直積空間における特異積分、擬微分作用素、固有関数展開の Riesz 平均、Cesàro 平均等に関する種々の関数空間(Lebesgue 空間、Hardy 空間、Sobolev 空間等)上での写像性、有界性(強有界性、弱有界性)等にかかわる調和解析の研究であるが、特に以下に述べる(1)-(5)について研究する。これらは互いに密接に関係していて、総合的に研究することで成果を得たい。

研究計画・方法は主に 2020 年度について述べるが、2021 年度、2022 年度は 2020 年度の研究成果を踏まえて、2020 年度の研究計画・方法を継続・発展する。また、研究課題に関係した新たな展開があった場合は、それにも対応する。以下研究目的(1)-(5)を述べて説明する。

(1) n 次元 Euclid 空間においてクリティカルオーダー $(n-1)/2$ に対する Bochner-Riesz 平均が間隙概発散する可積分関数の存在を示すこと。クリティカルオーダーの Bochner-Riesz 平均は、M. Christ(Weak type $(1,1)$ bounds for rough operators, Ann. of Math. 128 (1988), 19-42), J. L. Rubio de Francia 等のいわゆる rough operator に対する基本的な研究においても取り扱われ、その研究には、以後種々の発展がある。筆者は既に(Muckenhoupt の A_1) 荷重空間におけるベクトル値 weak type $(1,1)$ 有界性(弱 $(1,1)$ 有界性)、荷重 Hardy 空間における間隙概収束、そして概発散性等についての一般的な結果を得ているが(これらの結果を補完することにもなるのであるが)上記の事実を示したい。1 変数のフーリエ級数の場合には類似の古典的結果がよく知られているが、この問題についても S. Bochner の研究(1936) 以来知られているフーリエ級数との類似性により、肯定的解決が予想される。球面平均作用素(spherical mean) とクリティカルオーダーの Bochner-Riesz 平均のある種の類似性が知られている。M. Christ は上記論文において球面平均作用素から定義される間隙最大関数(lacunary maximal function) が Hardy 空間 H^1 から weak L^1 空間への有界な作用素を定義することを示した。しかし、M. Christ はこの論文において詳しい証明を与えていない。この結果はクリティカルオーダーの Bochner-Riesz 平均の間隙概収束・発散問題と深く関係していると思われる。そこで、

(2) 球面平均作用素に対するこの結果に独自の証明を与えたい。これにより、クリティカルオーダーの Bochner-Riesz 平均に対する理解も深まると予想される。

(3) クリティカルオーダー以下のオーダーの Bochner-Riesz 平均 S_R に対して、予想される p の範囲、endpoints に対して適切な荷重 L^p 空間におけるベクトル値弱評価を示すこと。これは非荷重空間上では M. Christ, A. Seeger, C. Sogge, T. Tao 等により研究されているが(M. Christ, Rev. Mat. Iberoamericana, vol. 3 (1987), 25-31 参照)、完全な形でベクトル値弱評価でさえまだ一部しかできていない。また荷重空間での研究はまだ始まっていないようである。そこで適当な重み関数を考えて、 $(S_R f)_j$, $j = 1, 2, \dots$ に対して、 ℓ^2 ベクトル値弱評価を、まず、スカラー値関数に対して弱評価が示されている p , $1 \leq p \leq 2(n+1)/(n+3)$ と $n(1/p - 1/2) - 1/2$ に対して示したい。これにより間隙概収束等にも応用がなされる。

(4) 滑らかさの正則性のない非斉次核から定義される Calderon-Zygmund 型(パラボリック) 特異積分作用素の弱 $(1,1)$ 有界性及びこのような特異積分核から定義される F. Ricci-E. M. Stein 型の(多項式相関数の振動因子を持つ) 振動特異積分作用素に対する弱 $(1,1)$ 有界性を積分核の大きさに対する最小の仮定のもとで示すこと。さらに、ある種の部分多様体上に沿った特異性を持つ特異積分作用素の研究に発展させたい。M. Christ, J. L. Rubio de Francia, S. Hofmann, A. Seeger, T. Tao, A. Vargas 等の研究により、Hormander 条件を満足しない核を持つ積分作用素に対する弱有界性が示されるようになった。特に、A. Seeger は論文:Singular integral operators with rough convolution kernels, J. Amer. Math. Soc. 9 (1996), 95-105 において斉次型の特異積分核に対してサイズに関するある弱い条件(積分核の単位球面上への制限が Zygmund クラス $L \log L$ に属すること)を仮定するだけで、任意の次元で、この核から定義される特異積分作用素の弱 $(1,1)$ 有界性を示すことに成功した。目的のひとつは $L \log L$ という仮定を H^1 (Hardy 空間) に緩和することである。A. Seeger の証明は Fourier 変換に依存する部分(microlocal analysis 的な部分)があるが、T. Tao (Indiana Univ. Math. J. 48, 1999) は Fourier 変換に依存しない証明をより一般に斉次群上の特異積分に対して与えている。

我々はこの A. Seeger の弱(1, 1) 有界性の結果を非斉次積分核の場合に拡張したい。また、(積分核の斉次性が一般的な nonisotropic dilation に関して考えられた)パラボリック特異積分の場合にも拡張したい。2 次元の(斉次核の) 場合はすでに筆者により解決された。これは T. Tao (1999) の Fourier 変換に依存しない方法を応用して証明されたが、3 次元以上のパラボリック特異積分の場合に拡張したい。さらに、このような特異積分核から定義される(Ricci-Stein 型の)振動特異積分作用素を考えてその弱(1, 1) 有界性を示したい。パラボリック特異積分の理論は曲線に沿った Hilbert 変換の研究(荷重ノルム不等式の問題は未解決である)と密接に関係しており、この方面の研究にも発展していくことが期待される。

(5) Littlewood-Paley (L-P) 型 square 関数による関数空間の特徴づけ。

(a) Folland-Stein の斉次群上の H^p を一般の L-P 関数で特徴づけること。一般の L-P 関数による Hardy 空間 H^p ($0 < p \leq 1$) の特徴づけは A. Uchiyama, *Studia Math.* (1985) により与えられた。その別証明が筆者により得られている。その証明方法は Peetre の不等式を用いる直接的なものであり、種々の設定に拡張する可能性がある。実際、parabolic H^p に拡張すること、ある種の荷重 Hardy 空間に適用されることが示されている。斉次群上の H^p に拡張することはある制限のもとで報告され、さらにその改良が arXiv に投稿されているがより完全な形で示したい。これまでの結果としては、Folland-Stein により熱方程式に係した L-P 関数による stratified group 上の H^p の特徴づけが知られている。

(b) H^1 Sobolev 空間 $W^1_{H^1}(R^n)$, $0 < n < \infty$, を適当な L-P 型 square 関数で特徴づけること。ここで $W^1_{H^1}$ は Hardy 空間 H^1 の Bessel ポテンシャル J_ν の像として定義される。R. Alabern, J. Mateu and J. Verdera は A new characterization of Sobolev spaces on R^n , *Math. Ann.* 354 (2012), 589-626 により Sobolev 空間 $W^1_{p, J_\nu}(L^p)$, $1 < p < \infty$, のある種の L-P 型(Marcinkiewicz 型)の square 関数による特徴づけが与えられた。これは、その後発展させられた。特に $p = 1$ の場合に対応すると考えられる H^1 Sobolev 空間の特徴づけがある種の Lusin の面積積分型の square 関数を用いて筆者により証明された。この特徴づけを L-P 型の square 関数により達成したい。

3. 研究の方法

調和解析関係の研究会、国際会議、講演会等に積極的に出席し、講演、意見交換・資料収集等に勤める(旅費の活用)。これにより、本研究目的に対して、共通の興味と重要性にたいする認識を有する国内外の研究者と意見交換し、共同研究を行うことは有意義な事と考える(本研究課題に関連して、既に D. Fan 氏(Univ. of Wisconsin-Milwaukee), Y. Ding 氏(北京師範大学), D. Yang 氏(北京師範大学)との共同研究によりいくつかの共著論文を発表している)。これらの研究はフーリエ積分・特異積分に関する調和解析学はもちろん、複素解析学、確率論、微分幾何学等と深く関わっている。そのため本研究に関連した研究結果や情報を載せた種々の図書類の購入も必要と考える。このために図書経費が使われる。

研究目的(1)-(5)を述べたが、研究目的に述べた項目毎に以下のような計画・方法で行う。

目的(1)について: 1 変数フーリエ級数の場合を再考察することから始める。Hardy 空間 H^1 の関数に対しては間隙概収束が知られているが、可積分関数の場合との違いを詳しく調べる。1 変数の特殊性がどこにあるのか調べ、多変数への拡張を試みる。Bochner-Riesz 平均の発散性に関して筆者は既に本研究目的に関連した研究を行っており、これも参考にして研究を進める。また、本研究は整数論にも密接に関係していると思われる。従って、本研究目的達成には整数論に関連した議論を深める必要性もでてくる可能性がある。たとえば Kronecker の定理、そしてそれに関連したいくつかの定理の再構成等も必要になる可能性もある。さらに、J.P. Kahane, R. Salem の三角級数の一意性に関するいくつかの仕事(Ensembles parfaits et séries trigonométriques, Hermann, Paris, 1963 も参考になる)、及び S.V. Konyagin, On everywhere divergence of trigonometric Fourier series, *Mat. Sb.* 191(200) $(L(\log L)^2)$ に近い空間での概発散)との関連性も考察したい。

目的(2)について: Bochner-Riesz 平均との関係を明らかにする別証明を与えたい。T. Wolff, *Lectures on harmonic analysis*, Univ. Lecture series Vol 29, AMS, Chap. 7, J. Duoandikoetxea-L.Vega, *Spherical means and weighted inequalities*, J. London Math. Soc. 53(1996) が参考になる。C.D. Sogge, *Fourier Integrals in Classical Analysis*, Cambridge Univ. Press, 1993 では 2 次元の場合に Bourgain の最大球面平均作用素に関する定理と Carbery の最大 Bochner-Riesz 平均に関する定理の証明の共通点について詳しく述べられている。これを参考にして、サークルを(曲率が零になることもある)一般の曲線に換えた場合に類似の結果が成り立つのかどうか調べてみたい(P. Sjörölin, *Studia Math.* (1974) が参考になる)。Bochner-Riesz 平均の研究と球面平均作用素の研究は互いに密接に関係していると思われ、これにより、両者の関係の理解を深め、(1), (2) の総合的解決を試みたい。

目的(3)について: ベクトル値弱有界性を示す研究に関しては次のような研究計画を考えている。クリティカルインデックス $(n-1)/2$ における、弱(1, 1) 有界性を示す従来の方法(M.

Christ, J. L. Rubio de Francia 等の方法) をその他の endpoints の場合に適用できるようにすることを試みる事から始める. さらに, クリティカルオーダーよりも小さいオーダーの Bochner-Riesz 平均の endpoints における弱有界性を扱った論文として: M. Christ の研究目的(3) で述べた論文, T. Tao, Weak-type endpoint bounds for Riesz means, Proc. Amer. Math. Soc. 124(1996), 2797-2805 等があるが, これらの結果を詳しく検討することも行う. 上の M. Christ (1987) は複素補間法とクリティカルインデックス $((n-1)/2)$ での評価方法をあわせて用いるのであるが, 間隙 (lacunary) ベクトル値弱有界性を示すには有効であるが, 一般のベクトル値弱有界性には改良が必要のように思われる. T. Tao の方法等も考慮し, 実解析的観点から証明を再構成することも検討する.

目的(4) について: A. Seeger (1996) と T. Tao (1999) の弱(1, 1) 有界性に関する論文の方法を見直す事から始める. 特に, 2次元の場合を良く調べてみる. Ricci-Stein 型の振動特異積分の弱有界性に対しては, A. Seeger, T. Tao の方法と筆者の荷重空間の場合に利用された (精密化された) L^2 (decay) 評価, 多項式に関する幾何学的な補題等を総合的に用いて解決を試みる. ところで, L^p 有界性 ($1 < p < \infty$) の場合は S. Z. Lu and Y. Zhang, Criterion on L^p -boundedness for a class of oscillatory singular integrals with rough kernels, Rev. Mat. Iberoamericana, 1992, により積分核が斉次で, 単位球面上で可積分条件 ($q > 1$) を満たす場合に振動特異積分の L^p 有界性 ($1 < p < \infty$) が示されている. しかし, 弱(1, 1) 有界性に関しては, この場合にも有界性が示されていないので, まずこの場合から取り組みたい. やはり, 2次元の場合から調べたい. また, T. Tao の方法は一般のパラボリック特異積分の場合 (2次元の斉次核の場合には既に証明された) に一般化できることが期待できるが, まず, 3次元の場合を詳しく調べたい. D. Fan 氏, Y. Ding 氏と協力して研究を進めたい.

目的(5) について: (a) については, arXiv に投稿されている結果の改良を検討することから始める. (b) については論文 S. Sato, Hokkaido Math. J. 48(1), 61-84, 2019 の方法が応用できないか詳しく検討することから始める.

4. 研究成果

non-isotropic dilation に付随した距離により定義された n 次元 Euclid 空間のボール上の平均により構成された Littlewood-Paley (L-P) 関数により Sobolev 空間の特徴づけが証明された. このような L-P 関数は, 次数の高い Sobolev 空間に対しては平均をとる作用を次数に関係して繰り返すことにより定義される. これは通常の Euclid ノルム, dilation に対して考えられる Sobolev 空間に対しても新しい結果である. この結果に類似の Sobolev 空間の特徴づけが n 次元 Euclid 空間の球面上の平均により構成された L-P 関数により証明された. 一般的な測度空間上で Calderon-Zygmund 型の特異積分作用素を考え, その最大特異積分作用素に対して精密な弱評価が証明された. k -plane transforms に関するサーヴェイを国際的な数学雑誌に出版した.

研究業績 論文

(1) [S Shuichi Sato, Sobolev spaces and functions of Marcinkiewicz type with repeated averaging operations over spheres](https://doi.org/10.1007/s42985-022-00203-1), Partial Differ. Equ. Appl. 3, 66 (2022). <https://doi.org/10.1007/s42985-022-00203-1>

(2) Shuichi Sato, Sobolev spaces with non-isotropic dilations and square functions of Marcinkiewicz type, Studia Mathematica, 267(3) 295-320 2022 年 9 月 DOI <https://doi.org/10.4064/sm210819-19-3>

(3) S. Sato, *Results in estimates for k -plane transforms*, Surveys in Mathematics and its Applications 17 29-78 2022 年 4 月, 10.24517/00065941

(4) **S. Sato**, Some weak type estimates for maximal singular integrals, MATHEMATICAL INEQUALITIES & APPLICATIONS, Volume 25, Number 1, January 2022, 221-249. doi:10.7153/mia-2022-25-14

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Shuichi Sato	4. 巻 25
2. 論文標題 Some weak type estimates for maximal singular integrals	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 MATHEMATICAL INEQUALITIES and APPLICATIONS	6. 最初と最後の頁 221-249
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.7153/mia-2022-25-14	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Sato Shuichi	4. 巻 3
2. 論文標題 Sobolev spaces and functions of Marcinkiewicz type with repeated averaging operations over spheres	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Partial Differential Equations and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s42985-022-00203-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Sato Shuichi	4. 巻 267
2. 論文標題 Sobolev spaces with non-isotropic dilations and square functions of Marcinkiewicz type	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Studia Mathematica	6. 最初と最後の頁 295 ~ 320
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4064/sm210819-19-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Sato Shuichi、佐藤 秀一	4. 巻 17
2. 論文標題 Results in estimates for k-plane transforms	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Surveys in Mathematics and its Applications	6. 最初と最後の頁 29 ~ 78
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.24517/00065941	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

researchmap
https://researchmap.jp/read0102999
金沢大学学術情報リポジトリKURA
佐藤 秀一 (Shuichi Sato) - マイポータル - researchmap
https://researchmap.jp/read0102999

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------