

令和 5 年 7 月 3 日現在

機関番号：14403

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2022

課題番号：20K03653

研究課題名（和文）四元数値関数の時間周波数解析

研究課題名（英文）Time-frequency analysis of quaternion-valued functions.

研究代表者

芦野 隆一（Ashino, Ryuichi）

大阪教育大学・教育学部・教授

研究者番号：80249490

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：ハミルトンの四元数は三次元における運動を表現できる。そのため、3Dグラフィクスやコンピュータビジョン、ロボットアームの操作等に应用されている。本研究では、四元数関数のフーリエ変換を導入し、基本的な性質を調べた。分数次フーリエ変換、双対性、コリレーション分析、さらなる応用として、四元数値関数の場合は両側フーリエ変換が満たす性質のうち、どのような形かを求めるという目的で、研究を進めている。フーリエ変換について知られている様々な性質や定理が分数次フーリエ変換の場合にどのような形で成り立つかを研究した。そのような定理の中で特に詳しく研究した題材が不確定性原理である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

フーリエ変換と分数次フーリエ変換の関係を研究した。具体的には分数次フーリエ変換では分数次パラメータを持つ。従って分数次パラメータを変更した場合に、不確定性原理がどのような変わるかを研究した。扱う信号の時間（または位置）と周波数の情報を同時に詳しく調べることができないことが知られている。この「フーリエ変換」を別の変換である「分数次フーリエ変換」に変更すればどうなるかを研究した。フーリエ変換と分数次フーリエ変換の関係を研究した。具体的には分数次フーリエ変換では分数次パラメータを持つ。従って分数次パラメータを変更した場合に、不確定性原理がどのような変わるかを研究した。

研究成果の概要（英文）：Hamilton's quaternion can express motion in three dimensions. Therefore, it is applied to 3D graphics, computer vision, and manipulation of robot arms. As a fundamental question, I am researching for the purpose of investigating what kind of properties the fractional Fourier transform satisfies among the properties that the Fourier transform satisfies. Fractional Fourier transform, Duality, Correlation analysis, Applications In addition, in the case of quaternion numerical functions, among the properties satisfied by the two-sided Fourier transform, for the purpose of finding out what kind of form it is, I have been researching how various properties and theorems known about the Fourier transform hold in the case of the fractional power Fourier transform.

One such theorem that I have studied in detail is the uncertainty principle.

研究分野：ウェーブレット解析

キーワード：不確定性原理 分数次フーリエ変換 両側四元数フーリエ変換 時間周波数解析

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

ウィリアム・ローワン・ハミルトンは、平面上の運動（回転と平行移動）を表現できる複素数 C を拡張し、3次元（3D）空間の運動を表現できる四元数 H を考えた。現在では3Dアニメーションや航空機の制御等で3D回転の計算に四元数 H が使われている。

最近の研究では、複数の異なった時間周波数解析のアレイを使い、さらに時間周波数解析の対を考え、時間周波数解析のアレイをする方法の研究が行われている

四元数 H は非可換のため特別な注意が必要となる。

また、人間の網膜には錐体と呼ばれる3種類のセンサーがあり、これらの錐体が感知する Red, Green, Blue の光の強さの比によって、人間は視覚情報処理を行い、色として感じているといわれている。そのため、人間の視覚情報処理のモデルが四元数を使って解析することが可能になる。このような視覚情報処理モデルを提案し研究している。

2. 研究の目的

本研究は、様々な四次元の（非可換なデータあるいは可換なデータ）を四元数値データ（非可換なデータあるいは不可換なデータ）とみなして、四元数値ウェーブレット解析のみならず、様々な四元数値関数の時間周波数解析の数学的基礎を研究することである。

本研究では、人間の視覚情報を四元数値関数と捉え、視覚情報処理を四元数値関数の時間周波数解析として、四次元の時間周波数解析を適用する。

さらに、**サリエンシー**（特徴点, saliency）と呼ばれる脳科学の視覚的な顕著性の問題の解明に、四元数値フーリエ解析を応用したサリエンシーの数理モデルを作成することを目的とする。

3. 研究の方法

サリエンシー・マップは計算論上の概念であり、人間の脳にサリエンシー・マップが表現されている保証はないが、定義より特徴点写像は唯一であるから、サリエンシー・マップをこの枠組みで扱うことができる。現在、カラー画像のデータを四元数値のデータと、そのデータを四元数値フーリエ変換処理した変換データを対としたデータに四元数値関数の時間周波数解析を試みている。このカラー画像データと時間を合わせて考慮し、さらに時間周波数アトムとサリエンシーとの関係の一部を双対性を用いて表現する研究を進めている。

いくつかのタイプの四元数値時間周波数解析を研究し、国際会議 ISAAC2023で関係する論文を発表する予定である。

4. 研究成果

複数の処理レベルのサリエンシー・マップが脳内で分散して表現されていると主張している論文（たとえば[5] Bin Zhao, Edward J. Delp, Visual Saliency Models Based on Spectrum Processing, IEEE Winter Conference on

Applications of Computer Vision (WACV) 2015, 976–981, 2015.

DOI:10.1109/WACV.2015.135)もあり , 適切な枠組の研究している .

我々もまず , 2つの枠組みから検討中である . さらに注意深く考察が必要である . 最近の研究では , 時間周波数解析の対を考え , 解析する方法の研究が行なわれている . 我々は分数冪フーリエ変換の組を考え , その対の基本的な性質を研究した . その基本的な性質には , 合成積 , 相関 , 不確定性原理が含まれている .

国際会議 ISAAC2023 : the University of São Paulo, Campus Ribeirão Preto

(Brazil), the 14th International ISAAC Congress to be held from July 17 で以

下の関係する論文を口答発表と論文発表をする予定である .

Mawardi Bahri and Ryuichi Ashino , Coupled Fractional Fourier Transform:

Convolution and Correlation Theorems and Uncertainty Principle

以下の論文は

Ryuichi Ashino , Takeshi Mandai, Akira Morimoto,

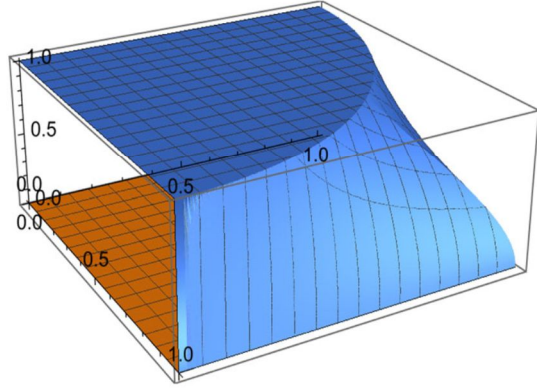
Inequalities on the closeness of two vectors in a Parseval frame

Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics

<https://doi.org/10.1007/s13160-023-00578-7>

は , 正規直交基底では , 正規直交基底から選んだ2つのベクトル直交しているが , パーセバルフレームから選んだ2つのベクトルはどの位近づけるかという問題を研究した . この研究により , パーセバルフレームがどの位近づけるかを不等式で評価し , 数値計算結果を以下に図示した . この問題は新しい課題であり , 数式処理 Mathematica を用いて得られた結果を図示している .

Fig. 1 Graph of $\min \left\{ 1, \frac{\sqrt{1 - (\max\{x, y\})^2}}{\min\{x, y\}} \right\}$



$$\frac{\sqrt{1 - (\max\{x, y\})^2}}{\min\{x, y\}} > \frac{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2}}{xy} \iff x^2 + y^2 > 1$$

The maximum of the function in Fig. 2 (Right) is $\frac{1}{4}$ at $(x, y) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

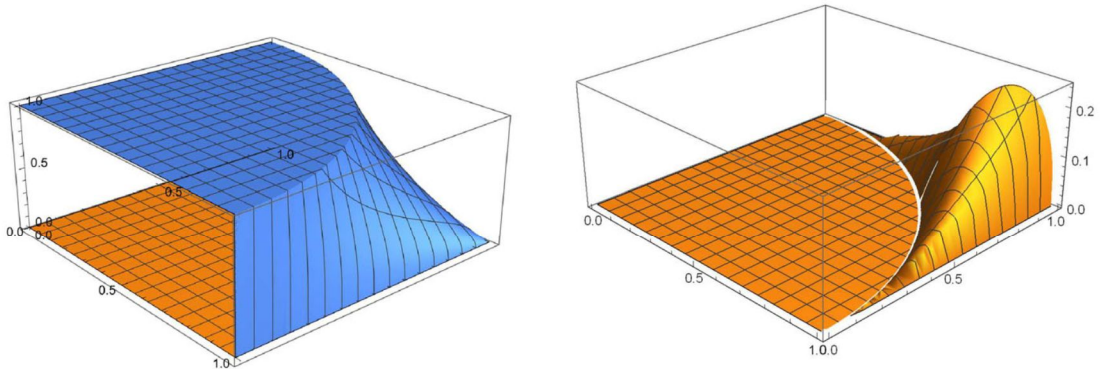


Fig. 2 (Left) $\min \left\{ 1, \frac{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2}}{xy} \right\}$, (Right) $\max \left\{ \frac{\sqrt{1 - (\max\{x, y\})^2}}{\min\{x, y\}} - \frac{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2}}{xy}, 0 \right\}$

Theorem 3 Let $F = (f_k)_{k \in K}$ be a Parseval frame. If $k \neq l$, then

$$|\langle f_k, f_l \rangle| \leq \sqrt{1 - \|f_k\|^2} \sqrt{1 - \|f_l\|^2},$$

in other words, if $f_k, f_l \neq 0$, then

$$\frac{|\langle f_k, f_l \rangle|}{\|f_k\| \|f_l\|} \leq \frac{\sqrt{1 - \|f_k\|^2} \sqrt{1 - \|f_l\|^2}}{\|f_k\| \|f_l\|}.$$

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 5件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Mawari Bahri, Ryuichi Ashino	4. 巻 19/6
2. 論文標題 Linear canonical wavelet transform: Properties and inequalities	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing	6. 最初と最後の頁 1-19
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0219691321500272	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Mawari Bahri, Ryuichi Ashino	4. 巻 24/2
2. 論文標題 On uncertainty principles for the fractional Fourier transform	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 INFORMATION	6. 最初と最後の頁 85-92
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Bahri Mawardi, Ashino Ryuichi	4. 巻 2020
2. 論文標題 Solving Generalized Wave and Heat Equations Using Linear Canonical Transform and Sampling Formulae	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Abstract and Applied Analysis	6. 最初と最後の頁 1~11
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1155/2020/1273194	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Bahri Mawardi, Ashino Ryuichi	4. 巻 (SNSP 2019)
2. 論文標題 An Inequality for Linear Canonical Transform	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Sensor Networks and Signal Processing Proceedings of the 2nd Sensor Networks and Signal Processing,	6. 最初と最後の頁 311~323
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-981-15-4917-5_24	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ashino Ryuichi、Mandai Takeshi、Morimoto Akira	4. 巻 40
2. 論文標題 Inequalities on the closeness of two vectors in a Parseval frame	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 1329 ~ 1340
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13160-023-00578-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Bahri Mawardi、Ashino Ryuichi	4. 巻 -
2. 論文標題 Fractional Fourier Transform: Duality, Correlation Theorem and Applications	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 2022 International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition (ICWAPR)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1109/ICWAPR56446.2022.9947156	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Bahri Mawardi、Ashino Ryuichi	4. 巻 -
2. 論文標題 A New form of Plancherel Theorem for Two-Sided Quaternion Fourier Transform	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 2022 International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition (ICWAPR)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1109/ICWAPR56446.2022.9947132	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件 (うち招待講演 1件/うち国際学会 1件)

1. 発表者名 Ryuichi Ashino
2. 発表標題 Berenstein theorem related to two-sided quaternion Fourier transform
3. 学会等名 ISAAC Congress
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ryuichi Ashino
2. 発表標題 Some Properties of Fractional Wavelet Transform and its Relation to Conventional Wavelet Transform
3. 学会等名 The Third International Conference on Mathematical Characterization, Analysis and Applications of Complex Information (CMCAA 2020) Sept 11th - Sept 13th 2020, Beijing, China (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Ashino Ryuichi、Mandai Takeshi、Morimoto Akira
2. 発表標題 Inequalities on the closeness of two vectors in a Parseval frame
3. 学会等名 応用数理学会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Bahri Mawardi、Ashino Ryuichi
2. 発表標題 Fractional Fourier Transform: Duality, Correlation Theorem and Applications
3. 学会等名 2022 International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition (ICWAPR)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Bahri Mawardi、Ashino Ryuichi
2. 発表標題 A New form of Plancherel Theorem for Two-Sided Quaternion Fourier Transform
3. 学会等名 2022 International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition (ICWAPR)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	萬代 武史 (Mandai Takeshi) (10181843)	大阪電気通信大学・共通教育機構・教授 (34412)	
研究 分担者	守本 晃 (Morimoto Akira) (50239688)	大阪教育大学・教育学部・教授 (14403)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------