

令和 6 年 6 月 10 日現在

機関番号：24405

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03657

研究課題名（和文）凸錐上の解析と幾何の新展開

研究課題名（英文）New development of analysis and geometry on convex cones

研究代表者

伊師 英之（Ishi, Hideyuki）

大阪公立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：00326068

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,000,000円

研究成果の概要（和文）：表現論、複素幾何、調和解析のような純粋数学の様々な分野に関連し、しかも多変量解析や凸最適化といった応用数学にも幅広い応用をもつ等質錐の理論は、これまで独自に開発してきた行列実現の方法により見通しよく記述され、しかも等質錐よりも広いクラスの凸錐に拡張された。本研究では、このような枠組みで凸錐上のガンマ型積分公式とその応用、関連する多様体上の微分幾何についての様々な成果が得られた。この理論と密接な内的関連をもつ可解リー群の表現論および調和解析についても一般的な結果が得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究で得られた積分公式や幾何学的定理は、それ自身の数学的な価値だけでなく、数理統計や凸最適化への応用にも重要な意義がある。とくに、与えられた多次元データに最も適合する置換対称性をベイズ統計を用いて探索するというモデル選択問題において、ボトルネックとなる積分を、群の表現論と対称錐上の調和解析を用いて正確かつ簡単に計算することができたことは大きな成果であった。

研究成果の概要（英文）：The study of homogeneous cones is not only related to various areas of pure mathematics such as representation theory, complex geometry, and harmonic analysis, but also applied to multivariate analysis and convex optimization.

The theory of homogeneous cones is reorganized efficiently by the method of matrix realization developed by myself. In this research project, we obtained integral formulas of the Gamma type and their applications as well as various results about differential geometry over related spaces.

Moreover, we prove some general theorems in representation theory of solvable Lie groups and harmonic analysis,

which are intrinsically related to the theory of convex cones.

研究分野：非可換調和解析

キーワード：ウィシャート分布 変換 ヘッセ幾何 等質錐 等質ケーラー多様体 ジョルダン代数 グラフィカルモデル 可解リー群 連続ウェーブレット

1. 研究開始当初の背景

直線を含まない開凸錐で、あるリー群が線型かつ推移的に作用するものを等質錐とよぶ。正定値実対称行列全体のなす錐 $\text{Sym}^+(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ は、等質錐の典型例である。実際、一般線型群 $\text{GL}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ は $\text{Sym}^+(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ に $X \rightarrow AXA'$ ($A \in \text{GL}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $X \in \text{Sym}^+(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, A' は A の転置) によって推移的に作用している。錐 $\text{Sym}^+(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ は、半直線の自然な多次元化として数学の様々な場面に現れる。とくに Γ 関数の多次元化としての $\text{Sym}^+(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ 上の Γ 型積分は Wishart (統計学), Siegel (解析数論), G° arding (偏微分方程式) によって研究され、それぞれの分野で重要な役割を演じた。実は $\text{Sym}^+(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ は等質性に加えて「自己双対性」も備えた対称錐である。対称錐は、表現論、非可換調和解析、概均質ベクトル空間、保型函数論、微分幾何といった純粋数学の広範な分野のみならず、数理統計や凸計画法といった応用数学との関連においても活発な研究が展開されている。一方、対称とは限らない一般の等質錐については、Vinberg による基礎理論の構築の後、Gindikin によって等質錐上の幾何と解析における数々の興味深い結果が得られた。なかでも等質錐上の Γ 型積分公式を証明し、 G° arding の議論の一般化として、相対不変多項式のベキ乗の積をラプラス変換とするような超函数の族 (リース超函数) を導入し、それをを用いて様々な微分作用素の基本解を構成したことは重要である。さらに Gindikin は等質錐から定義される等質ジューゲル領域なる複素領域上の複素解析、とくにベルグマン核の求積やペイリー・ウィナー型定理の確立にも等質錐上の調和解析を応用した。私はリース超函数が正の測度となる必要十分条件を与え、そこで得られる正の測度を全て明示的に記述した。この仕事は様々な分野の研究者に引用されており、自身もリー群の表現論、複素幾何、そして数理統計に結果を応用した。当初は正規 j 代数や左対称代数を道具として等質錐を研究していたが、全ての等質錐が $\text{Sym}^+(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ の部分集合として、三つの公理を満たすベクトル空間の族から構成できることを示した後は、この行列実現の方法を利用して成果を得ている。さらに等質錐の行列実現を拡張して、全ての等質ヘッセ領域を行列の集合として実現することにも成功した。

さて、数理統計においては Wishart の仕事を発展させて、指定された成分を 0 とする対称行列 (これは多次元正規分布に条件付き独立性を指定することを意味する) からなる $\text{Sym}^+(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ の部分錐上の解析が、詳しく研究されてきた。ゼロ成分の位置は単純グラフによって指定されるが (グラフィカルモデル)、単純グラフが chordal なる性質をもつときに対応する凸錐上の解析が著しく扱いやすくなることが認識されている。近年、この扱いやすい凸錐 (以下簡単のために「chordal な凸錐」とよぶことにする) に対して、等質錐の場合と良く似た Γ 型積分の公式が得られた (Roverato 2000, Letac-Massam 2007)。等質性無しに Γ 型積分公式が成り立つことは私にとって実に驚くべきことであったが、Roverato たちの証明には複雑な計算と統計学的なアイデアが用いられており、当然あるべき等質錐の解析との関連は全く謎に包まれていた。私は、等質錐の行列実現で設定した三つの公理のうち一つを外すと等質性は失われるが Γ 型積分公式など解析の主要部分は依然成立すること、そしてこの特別な場合として、まさに chordal な凸錐が含まれていることを発見した (Ishi, Entropy 2016)。これによって、等質錐とグラフィカルモデルという二つの理論のアイデアを相互に利用することが可能となったのである。

2. 研究の目的

研究開始時までに培ってきた行列実現なる新手法によって等質錐は格段に見通し良く記述され、多くの成果を挙げることができた。とくに、等質錐と統計学のグラフィカルモデル理論に現れる凸錐の双方を含む広範なクラスの凸錐について行列実現の手法を拡張し、それによって等質錐とグラフィカルモデルについての既存の結果を統合し、この新しいクラスの凸錐に対して一般化することに成功してきた。本研究では以上の研究の流れをさらに加速させ、等質錐および関連する空間 (等質ジューゲル領域、等質ヘッセ領域) 上の調和解析と微分幾何を深化させるとともに、それらの結果を新しい凸錐にも拡張して、深さと広さの両方向に凸錐の理論を発展させることを目指す。数理統計や凸計画法を含む様々な分野とのアイデアの交換を促すために、非専門家にも理解しやすい形に成果をまとめることを強く意識する。

3. 研究の方法

行列実現の方法のポイントは、凸錐に作用する群作用が行列によって表される一方、凸錐上の標

準的な不変計量やアファイン接続がトレース, 行列式, そして逆行列を用いて与えられることである. 凸錐と双対錐を結ぶプラス変換やルジャンドル変換が綺麗な式で表される根拠としてこの仕組みがあることがこれまでの研究で分かってきた. 本研究でも, この原理を念頭におき, 具体例の観察と計算を積み上げて, 対称錐・等質錐・新しい凸錐の順に一般化の可能性を吟味する. 数理統計や凸計画法の専門家との議論により, 応用上意味のある問題から数学としても面白い設定を見出すことも心がる.

4. 研究成果

研究期間中, 以下の内容を学術雑誌で発表した.

- (1) 条件付き独立性をもった中心的多変量正規分布にしたがうデータに対して, それに最も適合する成分間の置換対称性をベイズ統計の手法で探索する研究について大きな進展があった. ベイズ統計でボトルネックになるのは正規化定数を求積する積分計算であるが, それを近似計算ではなく積分公式によって正確かつ簡便に計算することがポイントである. 条件付き独立性を課さない場合, 積分範囲であるパラメータ集合は対称錐となるので, 置換群の表現論を利用して付随するジョルダン代数の構造を決定し, 正規化定数を明示的に得ることに成功した. データの次元が大きくなると探索するべき置換群の数は膨大になるが, 巡回群の場合に絞って, メトロポリス・ヘイスティング法により妥当な解を与えるアルゴリズムを実装した (Annals of Statistics 50, 2022). さらに, 長さ4以上のパスグラフを含まない chordal グラフで表される条件付き独立性をもつデータについては, 等質錐上の解析に帰着させる形で正規化定数を明示的に与えることに成功した (Phys. Sci. Forum 5, 2022). 以上はアンジェ大学 (フランス) の Piotr Graczyk 氏, ワルシャワ工科大学 (ポーランド) の Bartosz Kolodziejek 氏, ヨーク大学 (カナダ) の Helene Massam 氏との共同研究である.
- (2) 一般線型群 $GL(N, R)$ の部分群 G について, gg' (ただし g は G の元で g' はその共役) の形の正定値対称行列を逆共分散行列とするような中心的多変量正規分布のなす統計モデルはガウシアン群モデルとよばれ, 近年盛んに研究されている. 我々は gg' のなすパラメータ集合が凸集合になる場合に, 等質凸領域の理論を援用して詳しい解析を行い, 最尤推定量が一意的に存在するサンプル数の最小値を与え, さらに最尤推定量をサンプルの有理関数として表示する明示公式を得た (Lecture Notes in Comput. Sci. 12829, 2021). これは行列実現の理論を直接的に応用して得られた結果である.
- (3) 等質ケーラー計量を許容する単連結複素領域はジーゲル・ヤコビ領域にアファイン変換群として単純推移的に作用する可解リー群の部分群の複素軌道として全て具体的に実現できることを示した (Springer Proc. Math. Stat. 447, 2024). これも行列実現の方法の拡張として得られた結果であり, 等質ケーラー多様体におけるジーゲル・ヤコビ領域の普遍性と, 群が推移的に作用する指数型分布族におけるウィシャート・ガウス分布の普遍性の類似点が明瞭になったことは大きな成果である.
- (4) 統計多様体の理論において, 二重自己平行部分多様体は基本的な対象である. 対称錐の統計多様体としての構造はユークリッド的ジョルダン代数を用いて記述されるが, 我々はユークリッド的とは限らない半単純ジョルダン代数の設定において二重自己平行部分多様体を代数的に特徴づけた. これは凸計画法の設定においては, 最適解が反復なしに明示的に求まるような問題に対応する (Inf. Geom. 7, 2024). 以上は福井大学の小原敦美氏, 政策研究大学院大学の土谷隆氏との共同研究である.
- (5) 対称錐をそれ自身の中につづる共形変換全体のなす半群は, 表現論および調和解析において興味深い対象である. 我々は双対 Vinberg 錐という5次元の非対称等質錐について同様の半群を定義し, 研究した. 半群を明示的に記述し, 対称錐と同様の構造定理が成り立つことが確認できたが, 標準的な不変計量に関する縮小性が成り立たないという新しい現象も発見した (Springer Proc. Math. Stat. 366, 2021). この研究では双対 Vinberg 錐の3次の実対称行列への埋め込みを全面的に利用しており, 将来, 一般の等質錐に拡張する際にも行列実現の方法が有効であることを示唆している.
- (6) 線型リー群とベクトル空間 V の半直積として定まるアファイン変換群の V 上のテンソル場への自然な作用に付随する連続ウェーブレット変換を考察した. その状況で現れるユニタリ表現は一般に既約とは限らないが, 我々は認容ベクトルが存在する十分条件を群の表現論を利用して与え, 具体例として3次元相似変換群の自然な作用に関するベクトル場についての再生公式を計算した.

(Lecture Notes in Comput. Sci. 12829, 2021). 以上は大城和秀氏との共同研究である.

- (7) 指数型可解リー群の既約ユニタリ表現は余随伴軌道と一対一に対応づけることができ、しかも表現の代数的な情報が余随伴軌道の幾何的な情報に反映するという軌道の方法の理論は長い歴史を持ちながら現在も発展している. 我々は、余随伴軌道がアフィン部分空間の開部分集合であるという条件のもとで、普遍包絡代数における微分表現の核と、アフィン部分空間の定義イデアルの間に自然な関係があることを発見した (Forum Math. 36, 2024). これは等質ケーラー多様体に推移的に作用する可解リー群の表現にも適用できる結果である. 以上はスファックス大学(チュニジア)の Ali Baklouti 氏との共同研究である.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 8件／うち国際共著 4件／うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Piotr Graczyk, Hideyuki Ishi, Bartosz Kolodziejek, Helene Massam	4. 巻 50 (3)
2. 論文標題 Model selection in the space of Gaussian models invariant by symmetry	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Annals of Statistics	6. 最初と最後の頁 1747 - 1774
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1214/22-AOS2174	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Piotr Graczyk, Hideyuki Ishi, Bartosz Kolodziejek	4. 巻 5
2. 論文標題 Graphical Gaussian Models Associated to a Homogeneous Graph with Permutation Symmetries	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Physical Sciences Forum	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3390/psf2022005020	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hideyuki Ishi	4. 巻 12829
2. 論文標題 On Gaussian group convex models	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Springer Lecutue Notes in Computer Science	6. 最初と最後の頁 256 ~ 264
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-030-80209-7_29	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hideyuki Ishi and Kazuhide Oshiro	4. 巻 12829
2. 論文標題 Continuous Wavelet transforms for vector-valued functions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Springer Lecture Notes in Computer Science	6. 最初と最後の頁 331 ~ 339
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-030-80209-7_37	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hideyuki Ishi and Khalid Koufany	4. 巻 366
2. 論文標題 The compression semigroup of the dual Vinberg cone	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Springer Proceedings in Mathematics and Statistics	6. 最初と最後の頁 123 ~ 136
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-78346-4_8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ohara Atsumi, Ishi Hideyuki, Tsuchiya Takashi	4. 巻 7
2. 論文標題 Doubly autoparallel structure and curvature integrals	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Information Geometry	6. 最初と最後の頁 555 ~ 586
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s41884-023-00116-x	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ishi Hideyuki	4. 巻 447
2. 論文標題 On a Concrete Realization of Simply Connected Complex Domains Admitting Homogeneous Kähler Metrics	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Springer Proceedings in Mathematics and Statistics	6. 最初と最後の頁 261 ~ 272
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-981-99-9506-6_9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Baklouti Ali, Ishi Hideyuki	4. 巻 36
2. 論文標題 Open orbits and primitive zero ideals for solvable Lie algebras	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Forum Mathematicum	6. 最初と最後の頁 571 ~ 584
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/forum-2022-0307	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計11件（うち招待講演 3件 / うち国際学会 5件）

1. 発表者名 伊師英之
2. 発表標題 色付き等質グラフからの等質錐の構成
3. 学会等名 日本数学会2022年秋季総合分科会函数解析学分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hideyuki Ishi
2. 発表標題 Complex domains admitting homogeneous Kahler metrics
3. 学会等名 HAYAMA Symposium on Complex Analysis in Several Variables XXIII (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Hideyuki Ishi
2. 発表標題 On Gaussian group convex models
3. 学会等名 5th Conference on Geometric Science of Information (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hideyuki Ishi and Kazuhide Oshiro
2. 発表標題 Continuous wavelet transforms for vector-valued functions
3. 学会等名 5th Conference on Geometric Science of Information (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 伊師英之
2. 発表標題 調和解析の問題
3. 学会等名 RIMS研究集会「複素幾何学の諸問題II」
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 伊師英之
2. 発表標題 On algebraic structure in decomposable graphical Gaussian models with group symmetry
3. 学会等名 OCAMI研究集会「統計的推測理論への幾何学的アプローチ」
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Hideyuki Ishi
2. 発表標題 On normalizing constants of chordal graphical Gaussian models with group symmetry
3. 学会等名 14th International Conference of the ERCIM WG on Computational and Methodological Statistics (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 伊師英之, 大城和秀
2. 発表標題 ベクトル値関数の連続ウェーブレット変換
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会函数解析学分会一般講演
4. 発表年 2021年～2022年

1. 発表者名 Hideyuki Ishi
2. 発表標題 Cholesky structures on matrices and their applications
3. 学会等名 Mathematical Methods of Modern Statistics 2 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 伊師英之
2. 発表標題 Berezin-Wallach-Gindikin-Jorgensen 集合について
3. 学会等名 第16回代数・幾何・解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 伊師英之
2. 発表標題 置換対称性をもつガウシアンモデルについて
3. 学会等名 ワークショップ「第二回 分布族と離散集合の幾何とその周辺」(招待講演)
4. 発表年 2021年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------