

令和 5 年 6 月 2 日現在

機関番号：32508

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2022

課題番号：20K03658

研究課題名(和文) 差分方程式の複素領域における研究とその応用について

研究課題名(英文) Research of difference equations in the complex domains and its applications

研究代表者

石崎 克也 (Ishizaki, Katsuya)

放送大学・教養学部・教授

研究者番号：60202991

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：研究成果はNevanlinna理論を応用して、線型微分方程式および線型差分方程式の有理型関数解の存在と解の増大度や値分布を記述したことである。特に、係数に指数多項式を含む場合に解と係数の値分布の性質を比較した。また、Nevanlinna理論を用いて複素平面上でのFermat型関数方程式および差分類似の未解決問題について部分的な解答と既知の定理の別証明を与えた。更に、差分radicalの考え方を導入しStothers-Masonの定理の差分類似を導いた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

20世紀前半に確立されたNevanlinna理論は、線型・非線型を問わず複素領域での微分方程式の有理型関数解を調べることに有効である。しかしながら、差分方程式やFermat型方程式などの関数方程式を取り扱うためには、Nevanlinna理論のそれぞれの方程式に対応する新たな展開が必要である。本研究は、基礎を支える理論構築と応用面の新技法提案からなる上昇螺旋を描き、自然科学における基礎研究の重要性を記述していると期待する。

研究成果の概要(英文)：By means of the Nevanlinna theory, we obtained several results on the existence of meromorphic solutions to linear differential equations and linear difference equations, in which we discussed the value distribution and the order of growth of meromorphic solutions. In particular, we investigated the properties on the value distribution of solutions in connection with the those of coefficients when exponential polynomials are included in the coefficients. We also have been concerned with some open questions of the Fermat type functional equations and difference analogues of them, and obtained partial answers to these questions and gave alternative proofs of some known results. Further, we introduced the idea of the difference radical and proved the difference analogues of the Stothers-Mason theorem.

研究分野：解析学

キーワード：Differential equations Exponential polynomials Functional equations Nevanlinna theory Difference equations Wiman-Valiron theory Growth of order Stothers-Mason theorem

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

複素数平面上において、微分方程式論と差分方程式論は、解析函数の研究と伴って、お互いに融合し、影響を及ぼし合いながら進歩・発展し続けてきた。20世紀初頭に完成された Wiman-Valiron 理論や Nevanlinna 理論に代表される整函数論、有理型函数論によって、20世紀を通して、Yosida (吉田耕作), Wittich, Hille, Bank, Laine, Steinmetz, Toda (戸田暢茂) 達によって複素領域における代数的常微分方程式論や複素振動論は発展を遂げた。これらに対応する研究を複素領域における差分方程式論に求めるために、新たな解析函数の理論を構築することが求められた。また、ある解析函数の性質が示されたときに、裏付けとなる具体的な特殊函数は函数方程式から生み出されて来た。20世紀の後半に、Yanagihara (柳原二郎) [4] らによって、存在定理が研究された。特に、21世紀に入り、Nevanlinna 理論においては、[2] などによって差分作用素への発展が見られた。Wiman-Valiron 理論においては [1], [3] などによる研究成果が、差分方程式など離散函数方程式論に応用された。2020年の段階では、海外研究協力者、特に、Halburd, Korhonen, Chiang 達によって、更なる値分布理論と函数方程式との融合的研究が始められた。

## 2. 研究の目的

最近の研究の中では、ある種の差分方程式の集合から、研究対象として期待度の高い差分方程式を検出 (detect) する方法が提案されている。検出された差分方程式は、特殊函数を生み出したり、応用面でも広く利用され、微分方程式との関係が期待されているものが多い。実際に、連続極限法などを用いて両者の関連づけがされている。検出後は、複素変数、実変数を問わず、差分方程式ごとに解の性質や更なる応用面の研究が進んでいる。多くの成果が得られる中において、研究の流れの中に濃淡がないわけではない。実際に、複素差分方程式論においては、有理型函数解の存在を仮定した必要条件を扱った研究が多く、有理型函数解の構成や存在のための十分条件の研究は少ない。本研究の目的は、ある種の差分方程式の集合から、既知の検出方法を改良や新たな検出方法を提案して、解の存在の必要条件を記述して研究対象として興味のある函数方程式を検出すること、また、解の存在の十分条件を既知の方程式の解との関係から導くこととした。特に、Nevanlinna 理論は、古典的な Malmquist の定理、Yanagihara の定理でも見られるように函数方程式の検出手段として効果的である。また、近年発達した差分 Nevanlinna 理論に加えて、差分方程式の有理型函数解の構成を古典的な方法と融合させることを提案する。実際には、ある種の差分方程式をみだす形式 Binomial 級数 (Factorial 級数) の性質を近年の研究とあわせ、複素領域での収束判定を導き出す。さらには、Euler- $\Gamma$  函数のように、複素変数、実変数を問わない汎用性のある有用な解析函数の構築に応用することであった。

## 3. 研究の方法

20世紀前半に確立された Nevanlinna 理論は、線型・非線型を問わず複素領域での微分方程式の有理型函数解を調べることにに対して有効である。しかしながら、差分方程式や Fermat 型方程式などの函数方程式を取り扱うためには、Nevanlinna 理論とそれぞれの方方程式に対応する新たな展開が必要である。以下では、対象となる函数方程式ごとに具体的な方法を記述する形式で研究方法を報告する。

(1) 線型微分方程式については、指数多項式の性質の理解を深めることで、係数に指数

多項式を含む場合に解と係数の値分布的性質を記述した。研究成果の一部に 1980 年代に Ozawa(小澤満)の取り扱った問題の精密化を含んでいる。同じ時期に Bank と Laine によって与えられた複素振動の問題は長い間未解決であったが 2019 年に Bergweiler と Eremenko によって解決された。問題解決の糸口となったのは指数多項式の考察である。複素多項式  $P(z)$  を指数に持つ函数  $\exp(P(z))$  をここでは指数多項式といい、これらにある性質を満たす有理型函数を乗じて和を作ったものを指数多項式と呼ぶ。古典的な指数多項式の研究から線型微分方程式の整函数解の位数についての問題を取り扱う方法を更に発展させることが研究目標のひとつである。2021 年度から 2022 年度にかけての研究では指数多項式に関する近年の結果と今後の課題を整理した。更に、高階線型微分方程式へ応用すること、並行して高階線型差分方程式の考察を進めることができた。

(2) 線型差分方程式については、近年発達した差分 Nevanlinna 理論に加えて、差分方程式の有理型函数解の構成を古典的な方法と融合させる方法を用いた。実際には、 $z^n = z(z-1)\cdots(z-n+1)$  とし、ある種の差分方程式をみたす形式 Binomial 級数 (Factorial 級数)  $Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $a_n \in \mathbb{C}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  の性質を近年の研究とあわせ、複素領域での収束判定を導き出した。複素領域での多項式係数線型差分方程式は 20 世紀初頭に Nörlund, Milne-Thomson, Whittaker らにより盛んに研究され、有理型函数解の存在も示されている。更に、1986 年に Praagman によって係数についての条件が緩和された。一方で、線型微分方程式論に対応する解の増大度や複素振動を記述するには有理型函数解の構成法を見直すことが求められていた。多項式係数線型微分方程式の Wittich らによる Newton の折れ線を用いる方法は多項式係数線型差分方程式では位数 1 未満の整函数解に関して応用可能であると考えられる。これらを纏めたものを Math arXiv に公開した。

(3) 17 世紀に提唱された Fermat の数論の問題を受けて 18 世紀に Waring は与えられた自然数を自然数の冪の和で表現可能かという問題に整理した。20 世紀初頭に Hilbert は十分大きな与えられた自然数について肯定的な証明を与えた。自然数の役割を函数に置き換える函数方程式の問題はしばしば Fermat 型函数方程式といわれ Gross, Osgood らによって議論されて来た。Hayman は 1984 年の論文で対象となる函数を超越的有理型函数、有理函数、超越整函数、多項式に分けて問題を整理し、2004 年 (Gundersen と共著)・2014 年に Nevanlinna 理論を用いた解法を紹介し未解決部分を浮き彫りにした。21 世紀に入り Nevanlinna 理論や Wiman-Valiron 理論などの値分布理論の差分類似の研究が進展するに伴い、Fermat 型函数方程式の差分類似も盛んに研究されるようになった。しかし、項数 3 の場合でさえ未解決部分が多い。本研究の中では、超越函数解について代数的常微分方程式の構成を試みた。代数的函数解については対数微分の補題の有理函数類似の理論構築を行い、一定の成果を得た。

#### 4. 研究成果

本研究では、Nevanlinna 理論や Wiman-Valiron 理論などの複素領域での値分布理論を応用して、線型微分方程式および線型差分方程式の有理型函数解の存在と解の増大度や値分布を取り扱った。特に、係数に指数多項式を含む場合に解と係数の値分布的性質を比較した。また、Nevanlinna 理論を用いて複素平面上での Fermat 型函数方程式および差分類似の未解決問題について部分的な解答と既知の定理の別証明を与えた。更に、差分 radical の考え方を導入し Stothers-Mason の定理の差分類似を導いた。加えて、差分 Riccati 方程

式や差分 Painlevé 方程式に代表される非線型差分方程式への応用も推し進めている。以下に、学術雑誌ごとに研究成果内容を纏めて報告する。

(1) Gundersen G. G., K. Ishizaki and N. Kimura : Restrictions on meromorphic solutions of Fermat type equations, Proc. Edinburgh Math. Soc. 63 (3) (2020), 654–665.

複素平面上での Nevanlinna 理論を Fermat 型函数方程式に応用した。有理函数と多項式に関して Nevanlinna 理論における対数微分の補題に対応する演算を導入し、超越的有理型函数と超越整函数と同じ理論構成で4者を取り扱えることを示した。これにより、既存の定理の別解を与えた。更に、多項式解に関して別角度からの評価式を得た。Fermat 型函数方程式の未解決問題解決のための中間的到達点として解の満たす微分方程式を導く手法がある。これに関して超越整函数の場合に一般項数に関する結果を得た。

(2) Hinkkanen A., K. Ishizaki, I. Laine and Kin Y. Lin : Complex oscillation of solutions of a third order ODE, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 45 (1) (2020), 451–466.

複素平面上での3階線型同次微分方程式の振動の問題を取り扱った。2階線型同次微分方程式においては超越整函数解が振動しない(零点が少ない)条件は詳細に調べられているが、これに対応する高階線型同次微分方程式については未開発の部分が多い。この論文の中では Wronskian で記述される連立函数方程式の取り扱いが長年の鍵であったが、これを整理し簡潔な表現を与えることが出来た。

(3) Ishizaki, K., R. Korhonen, N. Li and K. Tohge : A Stothers–Mason theorem with a difference radical, Math. Z., 298 (1-2) (2021), 671–696.

差分 radical の考え方を提起し Stothers-Mason の定理の差分類似を導いた。更に、差分 radical を応用した差分 Nevanlinna 理論の表現を利用して差分 Fermat 型函数方程式について解の存在と冪数との関係(不等式)を導いた。これらの不等式が最良であることを示すための非自明な例も構成した。

(4) Ishizaki, K. and Z.-T. Wen : Binomial series and complex difference equations, J. Math. Anal. Appl., 497 (2021), doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124844.

複素領域での差分方程式論は20世紀初頭に Norlund, Milne-Thomson, Whittaker らにより深められた。その後、2000年を境に線型差分方程式の有理型函数解・整函数解の解析的研究と増大度の研究は再び活発に研究されるようになった。この論文では、解を Binomial 級数で表現することに立ち返り、古典的な Lindelöf-Pringsheim の方法がどこまで有効かを調べた。

(5) Heittokangas, J., K. Ishizaki, I. Laine and K. Tohge : Exponential polynomials in the oscillation theory, J. Differ. Equations 272 (2021), 911–937.

Nevanlinna 理論の複素平面上での線型微分方程式の応用のひとつに有理型函数解の存在と解の増大度や値分布を記述する問題意識がある。この論文では、2階線型同次微分方程式の  $1/16$ -定理周辺の未解決問題に対して、Phragmén-Lindelöf 指数と Steinmetz の凸包を用いる方法で問題解決への進展を得た。

(6) Ishizaki, K. and Z.-T. Wen : Difference radical in terms of shifting zero and applications to the Stothers-Mason theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 150 (2) (2022), 731–745.

論文 (3) では、ある差分 radical の考え方を導入し Stothers-Mason の定理の差分類似を導いた。しかしながら、論文 (3) での差分 radical の定義では、不等式が最良で非自明な例も構成できるものの古典的な Stothers-Mason との間に不自然な相違が確認できた。そこで、別の角度から差分 radical を定義し、差分 Nevanlinna 理論の表現を利用することで、自然な形に Stothers-Mason の定理の差分類似を構築した。新たな定義のもとでも非自明な例も構成できる。この発想の転換は線型差分方程式の非自明な有理型函数解を構成するとき用いた 2 項級数 (下降階乗級数) の考え方を応用したものである。

(7) Heittokangas, J., K. Ishizaki, K. Tohge and Z.-T. Wen: Dual exponential polynomials and a problem of Ozawa : Proc. Royal Soc. Edinb. Sect. A, Math., 152 (3) (2022), 701–719.

複素平面上での線型微分方程式において、係数に指数多項式を含む場合に解と係数の値分布的性質を比較した。函数方程式の係数を与える指数多項式の性質が解の増大度に及ぼす影響などを纏めて報告した。研究成果の一部に 1980 年代に Ozawa (小澤満) の取り扱った問題の精密化を含んでいる。

(8) Heittokangas, J., K. Ishizaki, K. Tohge and Z.-T. Wen: Value distribution of exponential polynomials and their role in the theories of complex differential equations and oscillation theory, to appear in Bull. Lond. Math. Soc., 55 (1) (2023), 1–77.

線型微分方程式論で重要な役割を演じてきた指数多項式の性質の整理から取り組んだ。1980 年代に Bank と Laine によって与えられた複素振動の問題は長い間未解決であったが 2019 年に Bergweiler と Eremenko によって解決された。ここで問題解決の糸口となったのは指数多項式の考察である。この論文では、係数に含まれる指数多項式と解に現れる指数多項式の双対性についての結果および整函数解の零点の値分布 (複素振動) について新たな結果を紹介した。

## 参考文献

- [1] Y. M. Chiang and S. J. Feng, On the growth of logarithmic difference of meromorphic functions and a Wiman–Valiron estimate, *Constr. Approx.*, **44** (3) (2016), 313–326.
- [2] Y. M. Chiang and S. J. Feng, On the Nevanlinna characteristic of  $f(z + \eta)$  and difference equations in the complex plane, *Ramanujan J.* **16** (1) (2008), 105–129.
- [3] K. Ishizaki and N. Yanagihara, Wiman–Valiron method for difference equations, *Nagoya Math. J.*, **175** (2004), 75–102.
- [4] N. Yanagihara, Meromorphic solutions of some difference equations of the  $n$ th order, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **91** (1985), 169–192.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 8件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Heittokangas Janne, Ishizaki Katsuya, Tohge Kazuya, Wen Zhi Tao	4. 巻 55
2. 論文標題 Value distribution of exponential polynomials and their role in the theories of complex differential equations and oscillation theory	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Bulletin of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1~77
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1112/blms.12719	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Heittokangas Janne, Ishizaki Katsuya, Tohge Kazuya, Wen Zhi-Tao	4. 巻 152
2. 論文標題 Dual exponential polynomials and a problem of Ozawa	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics	6. 最初と最後の頁 701~719
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/prm.2021.29	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Ishizaki Katsuya, Wen Zhi-Tao	4. 巻 150
2. 論文標題 Difference radical in terms of shifting zero and applications to the Stothers-Mason theorem	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 731~745
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/proc/15703	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Ishizaki Katsuya, Wen Zhi-Tao	4. 巻 497
2. 論文標題 Binomial series and complex difference equations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 124844~124844
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jmaa.2020.124844	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Heittokangas Janne, Ishizaki Katsuya, Laine Ilpo, Tohge Kazuya	4. 巻 272
2. 論文標題 Exponential polynomials in the oscillation theory	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 911 ~ 937
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2020.10.015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ishizaki Katsuya, Korhonen Risto, Li Nan, Tohge Kazuya	4. 巻 298
2. 論文標題 A Stothers-Mason theorem with a difference radical	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 671 ~ 696
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-020-02604-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Gundersen Gary G., Ishizaki Katsuya, Kimura Naofumi	4. 巻 63
2. 論文標題 Restrictions on meromorphic solutions of Fermat type equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 654 ~ 665
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S001309152000005X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hinkkanen Aimo, Ishizaki Katsuya, Laine Ilpo, Li Kin Y.	4. 巻 45
2. 論文標題 Complex oscillation of solutions of a third order ODE	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica	6. 最初と最後の頁 451 ~ 466
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5186/aasfm.2020.4527	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Ishizaki Katsuya
2. 発表標題 Meromorphic solutions of Fermat type equations
3. 学会等名 Complex Analysis video seminars (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 石崎 克也 木村 直文
2. 発表標題 Meromorphic solutions of Fermat type functional equations
3. 学会等名 等角写像・値分布論 合同研究集会
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	藤解 和也  (Tohge Kazuya)  (30260558)	金沢大学・電子情報通信学系・教授    (13301)	

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	ライネ イルポ  (Laine Ilpo)		



## 6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	ガンダーセン ガリー  (Gundersen Gary)		
研究協力者	木村 直文  (Kimura Naofumi)		
研究協力者	ヒンカネン アイモ  (Hinkkanen Aimo)		
研究協力者	リン キン  (Lin Kin Y.)		
研究協力者	コルホネン リースト  (Korhonen Risto)		
研究協力者	リー ナン  (Li Nan)		
研究協力者	ベン チータオ  (Wen Zhi-Tao)		
研究協力者	ヘイトカンガス ヤンネ  (Heittokangas Janne)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フィンランド	University of Eastern Finland			
米国	University of New Orleans	University of Illinois		
中国	Qilu Normal University	Shantou University	Hong Kong University	