様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　５ 月 ２９ 日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2020～2023
課題番号：２０Ｋ０３６６１

研究課題名（和文）グラフ構造の幾何学的表現の解析による数論的変換のエルゴード理論

研究課題名（英文）Ergodic theory of number theoretical transformations based on geometric analysis of structure of graphs

研究代表者
仲田　均（Nakada, Hitoshi）

慶應義塾大学・理工学部（矢上）・名誉教授

研究者番号：４０１１８９８０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,500,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、Farey グラフの構造を利用し、ざまざまな連分数変換のエルゴード理論的性質や確率論的性質の研究を行った。とりわけ複素数における虚二次体のFarey グラフの構造とFord 球との関係を研究する事でユークリッド虚二次体に関する nearest integer 型複素連分数変換の自然拡大を上半空間の測地線の集合上の写像として構成することに成功した。また、実連分数の問題では、α-連分数変換の中でエントロピー最大となるαの範囲を決定し、C. Kraaikamp, T. Schmidt, W. Steiner により提起された問題を解決した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
連分数の数論的側面と双曲空間上の測地線の関係はある程度知られていたが、本研究成果によりさらに Fareyグラフとその上の測地線の概念を利用することにより、この分野の研究に新たな展開を見せることに成功した。これにより、連分数の研究における数論、双曲幾何、グラフ理論など様々な側面の関連が見通せるようになった。今後、複素連分数の研究の進展に新たな道筋を示すことができた。

研究成果の概要（英文）：In this project, we studied some ergodic and probabilistic properties of various types of continued fraction maps concerning to the sturucture of the Farey graph. In particular, we constructed the natural extensions of complex continued fraction maps of the nearest integer type associated with the Euclidean imaginary quadratic fields. The extension maps are defined on the set of geodesics on the upper-half space. Concerning the real number case, we showed that the range of alpha of the maximun value of the entropy of the alpha-continued fraction maps. This gives the answer to the question by C. Kraaikamp, T. Schmidt and W. Steiner.

研究分野：連分数のエルゴード理論

キーワード：連分数変換　エルゴード理論　Farey グラフ　虚二次体

１．研究開始当初の背景

連分数の研究の長い歴史の中で、確率論的研究は Gauss に始まり 20 世紀初頭の Lebesgue による測度論の確立以降、Kuzmin、Levy、Doeblin などにより 20 世紀前半に著しく発展した。この中では現在低次元可測力学系において重要な役割を果たす transfer 作用素の概念も現れている。その後、Renyi により f 展開の名の下に n 進展開として一般的な数展開の統一的な研究が始まりエルゴード理論やカオス理論の発展に伴い様々な様相を呈した。一方で連分数展開の多次元化の試みは多くなされているが未だに数論において本質に切り込むような意味のあるものは知られていない。本研究との関連としては 19 世紀末の Hurwitz 兄弟による複素数の連分数展開の研究がある。複素連分数の問題はその定義自体にすでに議論の余地があり、それは今日まで続いている。20 世紀後半におけるこの分野の大きな進展のきっかけの一つにディオファントス近似と上半平面上の非ユークリッド幾何における測地流のエルゴード理論との結びつきがある。このことは 20 世紀前半の Ford による先駆的な結果の発展でもある。本報告者はエルゴード理論における自然拡大の概念をさらに併せることで幾つかの成果を挙げている。
このように、これまでの連分数の測度論的研究は、数論、確率論、エルゴード理論、幾何学などの分野横断的様々な視点により発展してきた。近年ではさらに Beardon 他による Farey グラフに最短パスとして測地線の概念を連分数持ち込んだ。彼らの一連の研究は本研究の大きな動機付けである。

２．研究の目的

連分数による数の表現に付随するエルゴード的変換を、与えられた連分数表現から自然に定まるグラフ上の境界集合上の変換として捉え、グラフ構造の境界集合への反映を主に双曲空間上に表現して解析することで連分数のエルゴード理論的研究を統一的に行う。それにより数学の発展の歴史の中で一つの大きな役割を果たしている連分数およびユークリッドアルゴリズムに関して分野横断的な研究を行い、様々な分野で異なった形式で行われてきた研究の統一を図る。具体的には、数論、アルゴリズム論、確率論、エルゴード理論、グラフ理論の融合とその中における相互の役割の明確にすることを研究の目的とする。

３．研究の方法

以下のような手順で複素数の連分数変換のエルゴード理論の研究を統一的に行う。
(1)有理数体上の Farey グラフを複素上半平面上へ表現するアイデアをユークリッド虚二次体上へ一般化された Farey グラフの 3 次元上半空間への表現に拡張し、そのグラフの構造が複素数全体の確率論的な性質にいかに反映されるか、これを幾何学的空間上のエルゴード理論の手法を用いることで研究する。
(2)その応用として、ユークリッド虚二次体に付随する様々な複素連分数変換のエルゴード理論を、有限連分数を Farey グラフ の頂点、無限連分数をその境界集合としての扱う視点から研究する。さらに、ここで得られた新たな手法を他の多くの数論的変換のエルゴード理論へ一般化することを目指す。同時にここで得られた新たな知見を実連分数の研究にフィードバックする。
(3)グラフ構造が本質的に内在している局所体における連分数展開、ユークリッドアルゴリズムに対してグラフ理論、組合せ理論の方法論を適用することでエルゴード理論的手法との融合を研究して、通常の連分数理論（実数、複素数、多次元等）の研究に対する新たな手法の開発の可能性を追求する。

４．研究成果

本研究では以下の研究成果を得た。
(1)実数の連分数展開と Farey グラフの最短パスの関係を用いてα連分数変換に関する C. Kraaikamp-T. Schmidt-W. Steiner による問題の解決に成功した。具体的には以下の通りである：古典的な連分数変換は単位区間$(0, 1)$の元 x に対し $1/x-[1/x]$として定義されるが、α連分数変換は整数部分の取り方をαずらして、$(\alpha-1, \alpha)$の元 x に対して、$|1/x|-[|1/x|+\alpha-1]$として定義される。ここでαは 0 から 1 の値で変化する。各αについて変換の絶対連続な不変測度が存在しエルゴード的であることは良く知られている。また、$\sqrt{2}-1$ から 1 までのαではエントロピーの値も知られている。しかし、それより小さいαに関してはエントロピーの値の単調性が成立せず全てのαに対して正確な値を決定することはほぼ不可能である。C.Kraaikamp-T.Schmidt-W.Steiner は 2012 年に全てのαに対して変換の自然拡大を構成することに成功し、エントロピーの値の特徴付けを行った。同時に、エントロピーの値が最大となるのはαが $(3-\sqrt{5})/2$ と$(\sqrt{5}-1)/2$ の間にあるとき、かつ、そのときに限ると予想した。本研究では Farey グラフの測地線をα連分数の作るパスについて考えることとすべてのα連分数に対してルジャンドル定数が存在することを用いてこの問題を解決した。同時にこの証明がルジャンドル定数を持つ他の連分数変換にも応用できることを一般的に示した。この成果は論文として Osaka Journal of Mathematics(2022)に掲載されている。

(2)上記αの連分数に対して、絶対値を取らない変換、つまり $1/x-[1/x+\alpha-1]$、はTanaka-Ito型α連分数とよばれる。絶対値付きの場合は半正則型連分数とよばれる型であるのに対してこの場合は半正則性が成立しないため、αが１に近い場合のエントロピーの値に関する挙動が全く不規則になる。この場合には先行研究においては自然拡大の構成が[1/2, (√5 – 1)/2]のαでしか成功していなかった。本研究では、W. Steiner (CNRS)との共同研究により、すべてのαについて、この型のα連分数変換に絶対連続な不変測度が存在することとエルゴード性が成立する事を証明すると同時に自然拡大の構成に成功した。これによりαが１に近づくとき、エントロピーの値の変化は半正則な場合と全く異なる挙動を示すことが分かった。その詳しい解析は今後の研究により解明されることを期待している。今回の研究成果は論文として Tokyo Journal of Mathematics (2021)に掲載されている。

(3)連分数展開の特殊なものとして、近年に N-連分数とよばれる概念が考えられている。通常、実数の連分数展開は分子が１あるいは-1 として考えているが、分子を一般に非零整数 N として考えることでこれまでと異なった性質を持つ連分数展開が得られる。とりわけ分子を２以上のNとし、定義域の取り方を変化させることで有限個の整数のみを用いた実数の連分数展開が得られる。この連分数展開を導出する変換はNの値と有限個の整数の取り方により、力学系としては様々な異なった様相を示す。特に、変換のアトラクターが定義域の真部分集合になることもある。すべての場合に絶対連続な不変測度が存在し、エルゴード的であるが、その測度の台が有限個の連結成分を持つことが起こりうるという事を意味する。本研究では、Delft 工科大学 Cor Kraaikamp、および Jaap de Jonge との共同研究を行い、アトラクターが定義域全体になること、別の言い方をすれば絶対連続な不変測度の台が定義域全体になることの十分条件を幾つか与えることに成功した。逆に言えば、不変測度の台が連結にならないための必要条件を与える事にもなった。証明は１次元写像の構造解析のための古典的な方法を用いているが、幾つかの方法を組み合わせることで複雑な状況を解明することに成功した。この成果に関する論文は、Kraaikamp、de Jonge との共著の論文として Monatshefte fur Mathematik (2022)から出版されている。

(4)複素数の連分数変換の中ではガウス数体の整数を係数とした連分数展開を導くものがもっともよく研究されているが、本研究では全てのユークリッド虚二次体に関する連分数変換の研究を行った：虚二次体でユークリッドアルゴリズムが意味を持つのは、-1、-2、-3、-7、-11 の場合に限られる。それぞれに対して nearest integer 型の連分数変換が数論的に有効な意味を持つ形で定義される。このような変換は 1973 年に R. Lakein により定義され同時に幾つかの基本的な性質が証明された。特に-3、-7、-11 の場合にはそれぞれにおいて２種類の nearest integer 型連分数変換を定義している。報告者は過去に共同研究者と共に A.Hurwitz により定義された nearest integer 型連分数変換のエルゴード理論を研究し、自然拡大の構成も行った。その構成の中では、Legendre 定数とよばれる定数が存在することが重要な役割を果たしている。本研究では Lakein の定義したすべての連分数変換について研究を行った。まず、その第一段階として Legendre 定数の存在を証明した。ｚを複素数とする。虚二次体の元ｒをその整数環により既約な分数で表現したとき、その分母をｑとする。ｚとｒとの差を近似分母ｒの絶対値の２乗で正規化したものを考える。そのときに、誤差がある定数より小さければ必ず考えているｚの連分数展開の近似分数であるようなとき、その連分数に Legendre 定数が存在するという。つまり、Legendre 定数とは上のような性質を持つ定数の中の最大値である。これは純粋に数論的な定数であるが、連分数のエルゴード理論からの視点でも重要な意味を持つ。本研究ではさらに R. Kaneiwa、I. Shiokawa、J.Tamura により定義されたアイゼンシュタイン数体に付随する連分数に関してもこの定数が存在する事も示した。同時にそれぞれの場合に関して定数の上からの評価を与えた。この結果に関する論文は、H. Ei (弘前大)、R. Natsui (日本女子大)との共同研究として Journal of Number Theory (2022) に掲載されている。

(5) (4)で得られた結果（Legendre 定数の存在）に基づき、一つの例外を除いて様々な nearest integer 型の連分数変換に対して自然拡大の構成に成功した。例外となるのはアイゼンシュタイン数体の場合の基本領域が長方形となる場合である。この数体の場合±1 以外に積により回転を引き起こす単数が存在するため、基本領域が単数を乗ずることに関して不変でなくなる。そのために、3 次元上半空間の測地線を１次分数変換でうつすときに問題が生じる。このことが、Hurwitz 型の連分数変換で効果的に利用できた測地流のエルゴード性の議論が有効でなくなる。これ以外の場合には、上半空間の測地流のエルゴード性を利用して、Hurwitz の複素連分数変換のときに用いた変換の作るグラフ構造を基にした自然拡大の構成法がすべて有効になる。この構成の過程で、複素平面の新しい型のタイリングが作られることが判明した。特にそこで現れる複素平面のタイルの中に対応する虚二次体の整数環の作る基本領域となるものが存在することを示した。しかしながら、現れるタイルはすべてフラクタル図形となる境界を持ち、それ以上の解析は単純ではないことも同時に判明した。この解析が十分に行われれば、遡って Legendre 定数を決定することができる。これは今後の課題として残されている。今回の成果は(4)と同じく H. Ei、R. Nastui との共同研究で論文として、Discrete and continuous dynamical systems (2023)から出版されている。

(6)局所体におけるユークリッドアルゴリズムはコンピューターとの相性が良いこともあり、これまでも多くの研究がなされている。様々に考える多次元のユークリッドアルゴリズムに対してそれらを比較するためのコスト（必要計算回数）について研究を行った。コストの評価には様々なコスト関数を指標とする考えがある。本研究では一般論の構築を視野に入れながら三つの多項式に関するアルゴリズムについて、確率論的な立場からアルゴリズムのコストの期待値、あるいは分散の値を与えることに成功した。一般にコストの計算には無限次元化によりエルゴード理論の手法を用いて考えることが容易であるが、同時にグラフ理論、組合せ理論における母関数の手法も考えられる。今回は両者を併用することでそれぞれの方法の利点、欠点を吟味することも行った。一般論としては、次のようなことが言える：新たな評価を行うに際しては初期段階ではエルゴード理論的手法が有効である。この手法によりある意味で大まかな、しかし予期しない結果を得ることができる。一方、その結果を得た後では、更なる性質の研究ではグラフ理論・組合せ理論の手法の方が精密な議論が可能になる。本研究においても大数の法則を得る事、その結果として予期せぬコストの評価がエルゴード理論的手法で得られた。実際、対象とした三つのアルゴリズムでは fine cost と名付けたコストの期待値は同じ値を取ることが示された。しかし、この手法では中心極限定理まで示すには困難な問題が生じる。これに対して、fine cost の大数の法則の成り立ちの仕組みがエルゴード理論的手法ではっきりすると、それを基に新たな母関数の構成法の見通しが得られ、実際に構成に成功し中心極限定理の成立が証明できた。
この研究成果はV. Berthe (CNRS)、 R. Natsui、B. Vallee (CNRS)との論文としてまとめられて、finite fields and their applications (2022)に掲載された。この結果は今後の研究で、さらに多次元へと一般化することが可能と考えている。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計6件（うち査読付論文　5件／うち国際共著　3件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Ei Hiromi, Nakada Hitoshi, Natsui Rie	４．巻 43
２．論文標題 On the ergodic theory of maps associated with the nearest integer complex continued fractions over imaginary quadratic fields	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Discrete and Continuous Dynamical Systems	６．最初と最後の頁 3833--3924
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3934/dcds.2023071	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Jaap de Jonge, Cor Kraaikamp, Hitoshi Nakada	４．巻 198
２．論文標題 Orbits of N-expansions with a finite set of digits	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Monatshefte fur Mathematik	６．最初と最後の頁 79--119
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00605-021-01658-x	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 Ei Hiromi, Nakada Hitoshi, Natsui Rie	４．巻 238
２．論文標題 On the existence of the Legendre constants for some complex continued fraction expansions over imaginary quadratic fields	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Journal of Number Theory	６．最初と最後の頁 106 -- 132
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jnt.2021.08.004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Berthe Valerie, Nakada Hitoshi, Natsui Rie, Vallee Brigitte	４．巻 73
２．論文標題 Analysis of generalized continued fraction algorithms over polynomials	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Finite Fields and Their Applications	６．最初と最後の頁 1～66
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.ffa.2021.101849	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Hitoshi Nakada	4．巻 59
2．論文標題 An entropy problem of the α-cintinued fraction maps	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6．最初と最後の頁 453--464
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.18910/87487	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 –

1．著者名 Hitoshi Nakada, Wolfgang Steiner	4．巻 44-2
2．論文標題 On the ergodic theory of Tanaka--Ito type α-continued fractions	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	6．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3836/tjm/1502179343	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計1件（うち招待講演　1件／うち国際学会　0件）

1．発表者名 Nakada Hitoshi
2．発表標題 On continued fraction maps acting on the Farey graph
3．学会等名 Recent Progress in Ergodic Theory（招待講演）
4．発表年 2022年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

–

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	夏井　利恵 (Natsui Rie)	日本女子大学 (32670)	

６．研究組織（つづき）

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	江居　宏美 (Ei Hiromi)	弘前大学 (11101)	

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
オランダ	Delft University of Technology			
フランス	CNRS			