様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

KAKENHI 科研費

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　５ 月 １６ 日現在

機関番号：２４４０５
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2020～2023
課題番号：２０Ｋ０３６６２

研究課題名（和文）From elliptic operators to sub-elliptic operators

研究課題名（英文）From elliptic operators to sub-elliptic operators

研究代表者
古谷　賢朗（Furutani, Kenro）

大阪公立大学・数学研究所・特別研究員

研究者番号：７０１１２９０１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：(1) Cayley射影平面の余接束minus zero sectionはKaehler構造を持つが、その標準束が正則自明(= Calabi-Yau structure)であることを、具体的に各点で消えない正則な16-formを構成して示した。更にこのformを用いてCayley射影平面の対するBargmann変換の類似を構成した。
(2) Clifford代数に付随するベキ零Lie環(群)のlatticeの構成と分類に関しての研究にほぼ最終段階の結果に到達したので、次年度以降の科研費研究補助で共著者を招聘してとの協議の上論文に纏めて出版する予定である。

研究成果の学術的意義や社会的意義
(1),(2) は研究成果の(1),(2) に対応する。
(1) 階数１のコンパクト対称空間は多様体の具体例の中でも色々な幾何構造を持っていて、Euclid空間の場合には古典的に研究されている類似の研究結果（大域的な結果）が得られると期待しているが、ここでの研究成果のCayley射影平面が例外群に付随する空間で取り扱いが面倒なように見えるが、他の射影空間の場合との類似点や違いをよく見定めることにより最終結果を得た。
(2) この研究では可能な膨大な組み合わせを記述し、分類方法を明確にすることから出発したが、有限組み合わせであってもその数が膨大になることによる複雑さをいかに取り扱うかに苦心した。

研究成果の概要（英文）：(1) Although we know already that the punctured cotangent bundle of the Cayley projective plane has a Kaehler structure, in this research we showed that the canonical line bundle of this Kaehler structure is homomorphically trivial by constructing no-where vanishing holomorphic 16-form explicitly and by making use of this form we constructed a Bargmann type transformation on the Calyley projective plane.
(2) We could come to the final step for the construction and classification of lattices (or equivalently uniform distcrete subgroups) of the class of nilpotent Lie algebras(groups), which is attached to Clifford algebras. We
are going to fix a manuscript and to publish it after careful discussion with the coauthor by inviting her to Japan under a support of the next JSPS fund.

研究分野：大域解析学と幾何学

キーワード：大域解析学　Fourier 積分作用素　Clifford 代数　pseudo H type Lie group　一様離散部分群　sub Riemann構造　sub Laplacian　国際共同研究

様式　C – 19,　F – 19 – 1 （共通)

1.　研究開始当初の背景

本研究の中心目標は前世紀中旬の調和積分論の様に解析的に定義されるコホモロジー群と位相的コホモロジー群の同型対応や、楕円型作用素の指数定理に関わる多様体不変量と解析的に定義される量との関連を通じた大域的研究の更なる展開であり、局所的な古典解析学の直接の展開は目的とはしていなかった。一方古典解析学の研究結果は深いものを含んでおり、この研究を通じて新しい結果、例えば楕円関数の様な特殊関数に関する新しい知見を得れる可能性も期待していたが、本研究が取り扱いたい数学現象は幾何学と解析学に跨る現代数学の大きな話題であり、今なお様々な方向に活発に研究が行われている。それらの研究の特徴は、解析学、幾何学、物理学に跨っていることであり、色々なアイデアを包摂し相互が刺激し合い大変実りあるものである。又多くは数学的に理解すれば、物理現象を古典力学的解釈と量子力学的解釈との間の対応関係とも見られる (量子化と古典近似)。これは現象を如何に観測するか、解釈するかを通じての現象の理解を得ると言う意味では、研究の基本的立場である。しかしながら、困難なのは研究に値する数学現象がどこにあるかを見定めることであるが、物理現象の記述には幾何学構造による定式化が明確に意識され、その理解が数学と物理学のどちらの立場でも研究発展には必須のものであり、そこに研究に値する現象があることにも繋がっている。実際、多様体そのものも物理的解釈に従えばある物理系の集まりとしての形態空間と考えられる。もちろん全ての多様体が物理系に対応するわけではないがファイバー構造による記述は幾何学と物理学との密接な関係を意味する。この理解の上に重要な役割を果たすのが、その系の“ intrinsic ”な微分作用素である。これまでは楕円型微分作用素が主役であり、解析的に定義される不変量に関する多くの研究がなされた。本研究は標題にある様に、楕円型を超えて劣楕円型微分作用素がその役割を果たす幾何構造 (= sub-Riemann 構造) を取り扱い、それを通じて多様体上の解析現象と幾何構造の間の関係の発見や楕円型の場合には存在しない新しい現象の発見、解明が本研究の主目的である。

本研究で取り扱う微分作用素を自然に内在している多様体の幾何構造を物理的直感で説明すると以下の様に自然なものであることが理解されるであろう。実際、多様体上の運動は通常何らかの束縛状態にあることが一般的であると考えても良い。この状況を数学的に表現すると、運動方向を制限することを意味する真の部分束が接束に存在するような場合をいうが、それだけでは不十分で、どの状態からどの状態にも移り得るような性質であるはずである (でないと違った物理系とみなすことが出来る)。数学的にはここでの Hamilton 系が任意の点を始点とし任意の点を終点とする解が存在する ことを意味し、区分的に滑らかな曲線の範疇では保障されている (W. L. Chow, *Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*, Math. Ann. 117(1) (1939), 98-105)。この性質は Riemann の場合と違って、局所的にも一意性を保障しないが、そのことにこそ大域的な立場での研究が意味を持つ重要な視点である。

例えば Riemann の時とは違う現象を見つけた：W. Bauer and K. Furutani and C. Iwasaki, *Spectral zeta function of the sub-Laplacian on two step nilmanifolds*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 97(2012), 242 – 261 がある。ここでは、Laplacian の spectral zeta 関数は一般には無限個の極を持つが 2 step 冪零多様体の sub-Laplacian の場合は極が一個だけの有理型関数になる事を見つけた。

その構造、或いは性質を数学的には bracket generating property と言い、自明でないものが全ての多様体に存在するとは限らないが、その部分束に内積を考えたものを「sub-Riemann 多様体」と呼び本研究の中心研究対象の一つである。内積は Riemann 計量に対応するものである。

又この幾何構造及び、研究の位置づけとして関連する歴史的事実も述べておく。「sub-Riemann 構造」は「葉層構造」の対極の構造 (一言で言えば、ベクトル場の bracket 積で閉じているか開いているか) であるが、前世紀中頃から後半にかけて葉層構造が活発に研究された割にはこの構造に関する解析学的幾何学的な研究があまりなされていないことも、本研究を更に遂行すべき大きな意味である。

葉層構造の場合は、“横断的楕円型作用素” の概念を定義することは可能であるが、構造を直接反映した自然な微分作用素は存在しない。sub-Riemann 構造に対しては上述の様に構造の主要な性質を反映した微分作用素が存在し、Riemann の場合の Laplacian の様に sub-Laplacian が intrinsic に存在することも研究に値する十分な意味を持つ。

2.　研究の目的

前項での直感的な説明の構造は 3 次元以上でのみ意味があるが、かなりの範囲の多様体がその構造を持っていて、研究対象は十分に存在する。

具体的な場合について、接束に部分束が存在することの判断は特性類を見ることにより分かるが、それだけでは bracket generating property は位相的な方法では分からない。このことがどの多様体がその構造を持つのかの有用な判断基準が今の所不明であることに関連し、一般的に扱うのは現時点では難しいが、色々な例の研究を通じてその基準、或いは存在のための不変量を見つけることも重要な目標である。そのためには古典的に有名な (≈ 名前のついた) 多様体はかなりの範囲でその構造を持つと思われるが、それを確かめることも本研究の目的でもある (例えば、W. Bauer and K. Furutani and C. Iwasaki, *A codimension 3 sub-Riemannian structure on Gromoll-Meyer exotic sphere*, Differential Geometry and its Applications, 53(2017), 114 – 136)。

この構造を持った多様体 (sub-Riemann 多様体) 上に本研究題目にもある劣楕円型作用素 (sub-elliptic operator) が存在し、この作用素が sub-elliptic estimate を満たしていることによりスペクトル構造的には楕円型作用素と類似の振る舞いをしていることが分かるので取り扱いは十分に可能である。本研究の”主目的 ”はこの二つの研究対象 (sub-Riemann 多様体と付随する sub-Laplacian) とそれらの相互の関係を解明することである。一般的に多様体上には偏微分作用素、擬微分作用素及び Fourier 積分作用素が存在しているが、ある作用素が多様体の幾何構造に自然に付随する大域的なものであれば多様体の性質を自然に反映していると考えられるので、当然なんらかの現象がそこに内在しているはずである。従ってその現象を取り出し、相互関連を明らかにすることは研究の自然な目的であり、楕円型作用素から劣楕円型作用素になれば新しい現象を提示してくれるものと確信している。本研究代表者は幾何構造が微分作用素を内包していれば研究に十分値すると理解している。

具体的には、前回の科研費補助での研究の発展 · 継続として研究開始の時点では以下の問題 (a) ∼ (e) を中心に複数の研究協力者とともに役割分担をし同時並行して研究することを目的としていたが、解明されるべき内容はいろいろの事柄を含んでいて、また研究途中に新たに派生する問題も取り組み、次の科研費研究の新たな問題としても継続される。

(a)　ベキ零 Lie 群は良い (=equi-regular)sub-Riemann 構造を持つ多様体の典型例である。その中で Clifford 代数に付随するベキ零 Lie 群 (= pseudo H-type Lie 群) はその Lie 環を通じてこれまで基本的な性質の研究を行ってきた。基本性質の一つとして、全ての場合に対して自己同型群の決定も目標にしていた。

更にその上の Laplacian, sub-Laplacian の zeta-determinant を具体的に決定し、両者 の比較を通じて新しい関数等式の可能性を探求する。この場合は complex Hamilton-Jacobi 法に従って熱核の具体的な積分表示が存在するので色々な計算が可能である。そこからの情報を元に、sub-Laplacian に対する Kac’s 問題を考察する。又一般のベキ零 Lie 群で lattice が存在する場合 としない場合の違いが sub-Laplacian の熱核の中に反映されている様子を見出す。

(b)　Weinstein の Eigenvalue Theorem の sub-Laplacian version が成り立つはずであると予想しているが完全な証明を得るとともに、Maslov 量子化条件を満たす様々な Lagrangian submanifold の構成を行う。より具体的には、sub-Laplacian の陪特性流が完全積分可能でないときを主に扱い、トーラス以外のいろいろな Lagrangian submanifold を見つけることを目標 にする。そのために submersion、fiber bundle、principal bundle のもとでの Lagrangian submanifold の functorial property を論じ、Lagrangian submanifold の新しい構成を行う。

(c)　余接束、或いはそれから zero section を除いたところの Calabi-Yau 構造の構成と、幾何学的量子化作用素（= Bargmann type operator) の構成。この問題は前項の問題と密接に関係するが、Maslov 量子化条件の中 で不変測度の存在を保障してくれる性質でもあり多様体は限定されているが、具体的な構成には少 し工夫が要求されているので、それを解決する。

(d)　高次 Grushin 作用素の熱核の研究。Engel 群は 4 次元 3 step のベキ零 Lie 群であるが、この場合でさえ 3 step なので具体的なスペクトルは決定出来ないが、complex Hamilton-Jacobi 法による作用関数 (Jacobi の楕円関数で表される) は以前に得ている 。この結果を踏まえ楕円関数の様々な性質をもとに何らかの形での熱核の表示を 目指す。

(e)　本項最初の説明と関連するが、Lie 群には不変 sub-Riemann 構造が存在するが、特に compact 対称空間がいつも sub- Riemann 構造を持つかは不明である。本研究では対称空間に対して Lie 環構造を通じて構成可能 な sub-Riemann 構造の存在を個別に調べ、出来れば分類も試みる。

3.　研究の方法

研究費の多くは旅費として使用する予定で申請したが、予測不能なパンデミックで計画を大幅に変更せざるを得なくなった。パンデミックが終わるまで 2 年間延長し、当初の計画を遅れて実行できた部分もある。本研究の第一の方法は訪問 · 滞在又は招聘に研究費の大部分を充てて、直接の対面での議論を通じてのアイデアの交換から目標とする現象 (= 定理の集積) の解明 (= 証明) を目指す。また類似の問題を研究している研究者との研究会を開催、関連する研究会に出席して知見を広めるのも研究発展に必須のことである。このもとで個別の問題に応じて可能な方向を試行錯誤を積み重ねる。

数学研究は解明しようする目標の性質により解析的議論が必要なのか、代数的議論が中心になるのか等、自ずと見える部分があるが、証明したいと思っている現象 (= 定理として定式化される) に何が必要なのかは出発時に必ずしも明確ではない。この部分がはっきりするまでは特に直接対面での議論が研究遂行には必要 · 有効であることは周知のことと思っている。

以下研究成果欄の (1) の方法は、局所座標系の張り合わせの原点に戻って、いくつかの最大 8×8 の関数要素の行列式を手計算で行い、初等的ではあるが複雑な計算をやり遂げてこの成果の基礎となる結果を得た。また規約表現を扱うときに有用な Schur's lemma で出てくる定数の漸近挙動には Gamma 関数の性質も大きな役割があった。更にある集合が存在しないことを証明するのに Hilbert 零点定理を用いた。

(2) の方法は互いに交換可能で一次独立な正の involution の極大族による同次固有空間分解で module 空間を分解して自己同型がそこでいかに作用するかを詳しく見た。この方法は自己同型群の決定の時にも用いたが、ここでは更に逆方向の議論が crucial であった。

4.　研究成果

研究計画書を作成した時点では予想出来なかったパンデミックが丁度始まった頃が研究の初年度で以後 2 年半は計画していた共同研究者のいる外国訪問 · 滞在も、又共同研究者の招聘も出来なくて上記の目的の中で特定の問題 (c) のみに集中した時期もあったが、それなりの成果を得た。パンデミックで前回の科研費も 2 年間延長せざるを得なくなり、本計画の一部の研究は前回の科研費 (17K05284) で遂行できた結果もあり、それらは既に研究成果として報告済みであるので敢えて報告はしない (特に研究の目的の (a) の一部と (b))。パンデミックが終わり研究会も 2 度 (2023 年春と 2023 年秋) 開催し類似の問題を研究している研究者の講演も聞くことが出来た。

(1)　古典的な Bargmann 変換は、実ユークッリド空間の上の 2 乗可積分関数の空間 $L_2(\mathbb{R}^n)$ と複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$ 上の Gauss 測度に関する 2 乗可積分正則関数の空間 (Fock space) の間のユニタリ作用素のことであるが、この作用素の構成を可能にする構造 (= Kähler 構造とその標準束の正則自明性) がどの多様体にでもあるとは限らない。むしろ非常に限定はされているが階数 1 のコンパクト対称空間は全て必要な構造を持っていると思っていた。Cayley 射影平面以外は既に構成されているが、コロナ禍ようやく必要な構造の存在を見つけることが出来、Bargmann type 変換を構成出来た。残念ながらこの作用素はユニタリではない。コロナで前回の科研費と研究期間が重なり既にその研究報告書にも記載はしたが今回の科研費でも少しその続きを下の (3) の成果とも関連することを研究したので内容を要約した。

(2)　Clifford 代数に付随する冪零 Lie 環 (Lie 群、pseudo H-type Lie algebra, pseudo H-type Lie 群と呼んでいる) の研究を前回、前々回の科研費研究から続けているが、自己同型群の決定については延長した前回の成果報告書でおおよそ説明したのでここでは説明を省く。本科研費研究ではその lattice(一様離散部分群) の構成と分類の問題を研究期間の後半に集中した。2022 年秋には漸くノルウェー · ベルゲンの共同研究者を訪問し直接対面での議論により、また 2023 年 3 月から 4 月にかけてその共同研究者を日本に招聘することにより大幅に進展した。この報告書の作成時点ではほぼ完成したが原稿にするのには少し手間取っているところであり、2024 年夏ぐらいには完成を目指している。

(3)　研究期間の途中一年ほどかけて double submersion により定義される一般 Radon 変換を Fourier 積分作用素の枠組みで取り扱う研究（新たに上記 (c) より派生した問題) 時間を割き、Hörmander-Guillemin-Weinstein の transversal product theorem, clean product theorem と S.S. Chern の incedence relation の性質を持つ直積多様体の部分多様体の、Fourier 積分作用素の理論での役割を明確にしているところであり、年度が変わってから論文にまとめているところである。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計2件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　1件）

1．著者名 Kurando Baba and Kenro Furutani	4．巻 74, No. 4
2．論文標題 Calabi-Yau structure and Bargmann type transformation on the Cayley projective plane	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6．最初と最後の頁 1107-1168
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/86638663	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Furutani Kenro、Markina Irina	4．巻 568
2．論文標題 Automorphism groups of pseudo H-type algebras	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Journal of Algebra	6．最初と最後の頁 91～138
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2020.09.038	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計11件（うち招待講演　11件／うち国際学会　6件）

1．発表者名 Kenro Furutani
2．発表標題 Calabi~Yau structure and Bargmann type transformation on the Cayley projective plane
3．学会等名 Correspondences of various geometries at 奈良女子大学（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2022年

1．発表者名 Kenro Furutani
2．発表標題 Calabi-Yau structure and Bargmann type transformation on the Cayley projective plane
3．学会等名 Analysis seminar at University of Bergen, Norway（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2022年

1．発表者名 古谷賢朗
2．発表標題 Calabi-Yau structure and Bargmann type transformation on the Cayley projective plane
3．学会等名 立命館大学幾何学セミナー（招待講演）
4．発表年 2021年

1．発表者名 Kenro Furutani
2．発表標題 Calabi-Yau structure and Bargmann type transformation on the Cayley projective plane
3．学会等名 Microlocal and Global Analysis, Interactions with Geometry at Potsdam University , Germany（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2021年

1．発表者名 Kenro Furutani
2．発表標題 Calabi-Yau structure and Bargmann type transformation on the Cayley projective plane
3．学会等名 Himeji conference on Partial Differential Equations（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2021年

1．発表者名 Kenro Furutani
2．発表標題 Calabi-Yau structure and Bargmann type transformation on the Cayley projective plane
3．学会等名 Analysis and PDE seminar at University of Bergen, Norway（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2022年

１．発表者名
古谷賢朗

２．発表標題
Calabi-Yau structure and Bargmann type transformation on the Cayley projective plane

３．学会等名
名古屋数理情報科学研究会（招待講演）

４．発表年
2023年

１．発表者名
Kenro Furutani

２．発表標題
Radon transformation and Fourier integral operators

３．学会等名
Analysis seminar, University of Hannover, Germany（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2023年

１．発表者名
古谷賢朗

２．発表標題
Invariant integral lattices in pseudo H-type Lie algebras : construction and classification

３．学会等名
東京理科大学野田キャンパス数理科学談話会（招待講演）

４．発表年
2023年

１．発表者名
古谷賢朗

２．発表標題
Invariant integral lattices in pseudo H-type Lie algebras : construction and classification

３．学会等名
東北大学大学院情報科学研究科解析と幾何セミナー（招待講演）

４．発表年
2024年

１．発表者名 古谷賢朗
２．発表標題 Calabi-Yau structure and Bargmann type transformation on the Cayley projective plane
３．学会等名 東北大学大学院情報科学研究科解析と幾何セミナー（招待講演）
４．発表年 2024年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	岩崎　千里 (Iwasaki Chisato)		
研究協力者	バウアー　オルフラム (Bauer Wolfram)		
研究協力者	マルキナ　イリナ (Markina Irina)		

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計3件

国際研究集会	開催年
Workshop:Global Analysis and Geometry	2023年～2023年
Mini-workshop : Global Analysis and Geometry	2023年～2023年
Nordic congress of mathematicians 29	2023年～2023年

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ドイツ	Leibniz University of Hanover			
ノルウェー	University of Bergen			