

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 5 月 31 日現在

機関番号：34315

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2020～2023

課題番号：20K03667

研究課題名(和文) スペクトル逆散乱理論の新展開—非線形問題と連続極限

研究課題名(英文) New development of spectral and inverse scattering theory-Non linear problems and continuum limit

研究代表者

磯崎 洋 (Isozaki, Hiroshi)

立命館大学・総合科学技術研究機構・プロジェクト研究員

研究者番号：90111913

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：波動現象を観測することにより我われをとりまく空間や物理系の特性を知ることは我われの認識の根本であり理論的な基礎を与えることは極めて重要である。本研究においては連続的な空間とともに離散的な空間(物理系)をも視野においてこれらの空間(多様体)上の波動に関するスペクトル量の数学的特徴を解明し、これらのスペクトル量から元の空間、物理系を決定する逆問題の研究を行った。一般的な非コンパクトリーマン多様体上での逆問題、半空間における弾性波動方程式の定常問題、さらに有限離散グラフ上でのラプラシアンに関する逆問題の解決、局所的に摂動された周期的格子上的波動に関する逆問題の解決等の如実な成果を得ることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

今日MRI等の画像診断は医療に不可欠なものとなっている。工学的問題において建築物の構造診断の際に音響診断のみならずサーモグラフィ等による遠隔からの非破壊的方法も極めて重要かつ有効である。このような観測データの解析から正しい結果が判定できるかどうかはその背後に確固たる理論的基礎がある場合のみであり、そのための理論的基礎、例えば解の一意性の問題、物理的パラメータの再構成のアルゴリズム、その安定性等を構築するのがこの研究の目的である。それは既知の数学の応用にとどまらず新しい数学的問題と手法の発見、既存の方法の深化等の理論的発展ももたらすと同時に数値計算にも重要なインパクトを与えるものである。

研究成果の概要(英文)：To know the characteristics of our ambient space or physical system by observing the wave propagation is the most fundamental problem in our recognition of the world. In this research, we studied the mathematical properties of various spectral quantities related to the waves on these manifolds and the associated inverse problems to recover the system in question. Our scope ranges over not only continuous manifolds but also on discrete manifolds, i.e. discrete graphs. We solved the inverse scattering problem on non-compact Riemannian manifolds with general metric, the stationary scattering theory on the elastic equation in the half-space, the inverse problem for Laplacians on discrete graphs, as well as the inverse scattering problem on locally perturbed periodic lattices. We also obtained the asymptotic expansion of solutions to the stationary elastic wave equation in the 3-dimensional half-space and derived the Rayleigh wave propagating only along the surface.

研究分野：スペクトル理論と逆問題

キーワード：逆問題 S行列 ディリクレ・ノイマン写像 シュレーディンガー作用素 離散グラフ

1. 研究開始当初の背景

波動伝播を観測することにより空間の性質を調べる逆問題は我われの外界認識の根幹をなすものであり数学のみならず物理学・工学においても基本的な重要性を持っている。特に無限に広がった領域内での波動散乱の問題は大きな困難を秘めており理論的研究の発展が必要不可欠である。我われの目指すのはこのような領域において波動方程式の解の部分的な情報から領域全体の性質を解明する逆問題である。連続的な領域は数学の立場からはリーマン多様体・ローレンツ多様体として定式化されるが、結晶上の波動も離散グラフ上の問題として定式化できる。これを離散的多様体と呼んでよいであろう。研究代表者は数理物理学・微分幾何学に現れる作用素のスペクトル理論とそれに関連する逆問題の研究を行ってきた。特に近年の研究において連続・離散的多様体の双方においていくつかの重要な例を解析することにより、連続系・離散系において平行した議論によって逆問題が解決されることを示すことが出来たのは大きな特徴である。離散多様体のスペクトル理論は連続的な多様体に比べて用いることのできる数学的手法が限られており未解決の問題が多かったのだが、最近の研究によって連続的な多様体上で用いられてきた数学的手法が離散問題にも適用されるようになり、また離散問題特有の方法も発見されて離散多様体上の逆散乱問題の研究は大きな可能性を秘めていることが認識されている。微分方程式・差分方程式に対する逆問題の研究は現在大きな発展をみせており研究者数・研究発表の機会も増大しつつある。このような状況をかんがみ研究代表者が行ってきた研究をさらに発展させることには大きな意義があると考えられる。

2. 研究の目的

本研究は連続的な多様体(微分幾何でいうところの微分可能多様体)と離散的多様体(固体物理学等に現れる離散グラフ)上の波動現象が共通な方法論によって解明できることを例証しようとするものである。連続的な多様体としては非コンパクトなリーマン多様体上のラプラシアン連続スペクトルの性質を調べ原子核物理学でよく知られたハイゼンベルグの S 行列がこの場合にも定義できることを示す。そしてこの S 行列から多様体を決定することを目標とする。同様の問題はリーマン多様体のみならずローレンツ多様体上の波動方程式に対しても重要な意味を持っている。格子上のシュレーディンガー方程式に対する波動伝搬現象は固体物理学における重要な問題である。この場合にも格子に対するハミルトニアンは連続スペクトルをもち、それを記述する波動関数の研究は数理物理学の重要なテーマである。この離散多様体上のハミルトニアン研究には連続多様体上におけるものと同様の手法が適用できることがいくつかの例によって確かめられており、スペクトル理論とともに逆問題の研究をさらに推し進める。

3. 研究の方法

リーマン多様体に関してラプラシアンのレゾルベント評価を行い、レゾルベントの無限遠における漸近挙動を調べることによって多様体上のフーリエ変換を定義する。このフーリエ変換を記述する一般化された固有関数から S 行列を定義する。この S 行列から多様体の任意有界部分における境界値問題のディリクレノイマン写像を構成し、境界制御法によって多様体を再構成する。ローレンツ多様体に対してはペンローズによる Minkowski 空間のローレンツ多様体への埋込みのアイデアを用いて直線と球面との直積型のローレンツ計量をもった多様体の摂動問題に帰着させる。非線形波動方程式の特異性の伝搬問題を考えることによってローレンツ計量の摂動の再構成を図る。格子上のシュレーディンガー作用素に対してもリーマン多様体の場合と同様にレゾルベント評価から格子上のフーリエ変換を定義し S 行列の構成、有界領域における境界値問題のディリクレノイマン写像、境界制御法へと進む。技術的な困難はあるが大きな目で見て同じ方針で進むことが出来るというのは重要な指針である。

4. 研究成果

非コンパクトリーマン多様体上の逆散乱問題を解決した。有界部分では任意のトポロジー、計量を許し非コンパクトな無限遠においては基準的な(しかし非コンパクト部分には任意の増大度を許した)多様体のスペクトル理論を展開しハイゼンベルグの S 行列を定義した。この S 行列から多様体のトポロジー、リーマン計量を定める逆問題を肯定的に解決した。この問題は 20 年あまりの間懸案としてきたものであるが最も困難であったレリッヒ型の定理を証明したことにより全体の完成をみた。有限離散グラフ上のシュレーディンガー作用素の境界値問題に対してノイマン固有値と固有ベクトルの境界上での値からグラフと作用素を定めるゲルファントの逆問題を解決した。微分作用素の場合には解決されていたが離散差分作用素に対しては未解決であった。今回、作用素の係数のみならずグラフの構造まで再構成できたことは大きな進歩である。この結果はさらに有界部分が摂動された周期的格子上の波動散乱問題にも適用され、 S 行列からポテンシャルや格子の構造を決定する逆問題も解決された。半空間における弾性波動方程式の定常問題においてヘルムホルツ型方程式の解の漸近展開の研究を行い、空間内部に進行する実体波と境界上のみを伝播するレーリー波を同時に導くことに成功した。このように性質の

異なる波を同時に取り出せる漸近展開はこれまで示されておらず懸案となっていたが10年以上の継続的研究により完成させることができた。ローレンツ多様体上の非線形波動方程式の逆散乱問題の研究において大きな進展があった。ミンコフスキー空間をローレンツ空間に埋め込むペンローズ図形の方法を用い直線と球の直積空間を摂動したローレンツ空間内の逆散乱問題として定式化し、問題の基本的枠組みを確立した。数年後には完成させられる見込みである。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 4件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 E. Blasten, H. Isozaki, M. Lassas and J. Liu	4. 巻 13
2. 論文標題 Gel'fand's inverse problem for the graph Laplacian	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 J. Spectr. Theory	6. 最初と最後の頁 1-45
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/JST/455	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 E. Blasten, H. Isozaki, M. Lassas and J. Liu	4. 巻 37
2. 論文標題 Inverse problems for the discrete heat equation and random walks for a class of graphs	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 SIAM J. Discrete Math.	6. 最初と最後の頁 831-863
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1137/21M1439936	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 H. Isozaki and A. Jensen	4. 巻 34
2. 論文標題 Continuum limit for lattice Schroedinger operators	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Rev. in Math. Phys.	6. 最初と最後の頁 2250001
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129055X22500015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 H. Isozaki and E. Korotyaev	4. 巻 125
2. 論文標題 Inverse resonance scattering on rotationally symmetric manifolds	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Asymptotic Analysis	6. 最初と最後の頁 347-363
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3233/ASY-201659	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 H. Isozaki, M. Kadowaki and M. Watanabe	4. 巻 43
2. 論文標題 Uniform asymptotic profiles of stationary wave propagation in perturbed two layered media	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Math. Meth. in Appl. Sci.	6. 最初と最後の頁 2789-2835
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/mma.5945	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件 (うち招待講演 11件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 磯崎 洋
2. 発表標題 Scattering in the Penrose diagram
3. 学会等名 Inverse Problems Seminar, University of Helsinki (招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 磯崎 洋
2. 発表標題 Inverse scattering on non-compact manifolds with general metric
3. 学会等名 HKIAS Visiting Fellows Lecture Series, HongKong Institute of Advanced Study (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 磯崎 洋
2. 発表標題 Continuum limit for lattice Schroedinger operators
3. 学会等名 Applied Inverse Problems, Goettingen (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 磯崎 洋
2. 発表標題 Rellich type theorem for lattice Schroedinger operators
3. 学会等名 ICIAM Symposium 2023, Tokyo (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 磯崎 洋
2. 発表標題 Wave scattering in the Penrose diagram
3. 学会等名 Helsinki-Aalto University joint seminar (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 磯崎 洋
2. 発表標題 Continuum limit for lattice Schroedinger equations
3. 学会等名 Aix-Marseille University analysis seminar (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 磯崎 洋
2. 発表標題 Scattering in the Penrose diagram
3. 学会等名 RIMS共同研究(グループ型A)量子散乱における順問題と逆問題の新展開(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 磯崎 洋
2. 発表標題 Recent topics on discrete Schroedinger operators
3. 学会等名 RIMS共同研究(グループ型A)量子散乱における順問題と逆問題の新展開(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 磯崎 洋
2. 発表標題 グラフ上のラブラシアンに対する Gel'fand の問題
3. 学会等名 立命館大学談話会(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 磯崎 洋
2. 発表標題 グラフラブラシアンに対する Gel'fand 問題
3. 学会等名 ひこね解析セミナー(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 磯崎 洋
2. 発表標題 Inverse scattering on non-compact manifolds with general metric
3. 学会等名 Interational Zoom Inverse Problems seminar(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計3件

1. 著者名 磯崎 洋	4. 発行年 2023年
2. 出版社 Springer	5. 総ページ数 399
3. 書名 Many-body Schroedinger Equation	

1. 著者名 Hioshi Isozaki	4. 発行年 2020年
2. 出版社 Springer-Verlag	5. 総ページ数 144
3. 書名 Inverse spectral and scattering theory --- An introduction	

1. 著者名 磯崎 洋	4. 発行年 2020年
2. 出版社 共立出版	5. 総ページ数 320
3. 書名 解析力学と微分方程式	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------